解答篇

單元 1 乘法公式

★ 國中基礎能力檢定 P.4

簡答

1. −4080　2. 7760　3. 64　4. 625　5. −1
6. 88　7. 12　8. 0　9. 7　10. (A)　11. (B)　12. (C)

詳解

1. $(-15)\times(-16)\times(-17)$
$=-(15\times16\times17)$
$=-4080$

2. $(88.8)^2-(11.2)^2=(88.8+11.2)\times(88.8-11.2)$
$=100\times77.6$
$=7760$

3. $(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3=[(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})]^3$
$=[3^2-(\sqrt{5})^2]^3$
$=4^3$
$=64$

4. $108\times25^3-2699\times25^2$
$=25^2\times(108\times25-2699)$
$=625\times(2700-2699)$
$=625$

5. $\dfrac{2019^2-2\times2019+1}{2018}-\dfrac{108^2+2\times108\times1911+1911^2}{2019}$
$=\dfrac{(2019-1)^2}{2018}-\dfrac{(108+1911)^2}{2019}$
$=\dfrac{2018^2}{2018}-\dfrac{2019^2}{2019}=2018-2019=-1$

6. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=10^2+2\times(-6)$
$=100-12$
$=88$

7. $\dfrac{\beta+1}{\alpha}+\dfrac{\alpha+1}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$
$=\dfrac{(6^2-2\times3)+6}{3}$
$=12$

8. $(a^2+2a+1)+\left(b^2+b+\dfrac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\dfrac{1}{4}\right)$
$+(d^2-2d+1)=0$
⇨ $(a+1)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2+(d-1)^2=0$
∵ a，b，c，d 為實數
∴ $a+1=0$，且 $b+\dfrac{1}{2}=0$，且 $c-\dfrac{1}{2}=0$，
且 $d-1=0$
得 $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{1}{2}$，$d=1$
所求 $a+b+c+d=(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}+1$
$=0$

9. $x^2-3x+1=0$ ⇨ $x-3+\dfrac{1}{x}=0$ ⇨ $x+\dfrac{1}{x}=3$
所求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

10. 利用平方差公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
$A=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^{16}-1)(3^{16}+1)=3^{32}-1$
檢查 $3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，
$3^5=243$，……
可知 3^n 的個位數依 3，9，7，1，3，9，7，1，……循環
∴ 3^{32} 的個位數為 1
即 $A=3^{32}-1$ 的個位數字為 0
故選(A)

11. 鋪色部分面積為 $(a+b)^2-\dfrac{ab}{2}\times4=a^2+b^2$
故選(B)

12. 所求為 $\dfrac{2.5\text{ 微米}}{50\text{ 奈米}}=\dfrac{2.5\times10^{-6}\text{ 公尺}}{50\times10^{-9}\text{ 公尺}}$
$=\dfrac{2500\times10^{-9}\text{ 公尺}}{50\times10^{-9}\text{ 公尺}}$
$=50$（倍）
故選(C)

高中先修課程 P.7

例題 1

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=5^2-2\times(-3)$
$=31$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=5^3-3\times(-3)\times5$
$=170$

練習 1

(1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=3^2+2\times1=11$

(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=3^3+3\times1\times3$
$=36$

例題 2

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$
$=3^2-2$
$=7$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=3^3-3\times3$
$=18$

練習 2

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$
$=5^2+2=27$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$=5^3+3\times5$
$=140$

先修銜接能力檢定 P.9

簡答

1. 970300　2. 510　3. 18　4. 36　5. 18
6. 1023　7. 665　8. (D)

詳解

1. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(99+1)^3-3\times99\times1\times(99+1)$
$=100^3-3\times99\times100$
$=970300$

2. $a^4b-ab^4=ab(a^3-b^3)$
$=ab[(a-b)^3+3ab(a-b)]$
$=3\times(5^3+3\times3\times5)$
$=510$

3. $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{b^3+a^3}{ab}$
$=\dfrac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$
$=\dfrac{3^3-3\times1\times3}{1}$
$=18$

4. $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\times\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$=3^3+3\times3$
$=36$

5. $a^6+\dfrac{1}{a^6}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^3-3\times a^2\times\dfrac{1}{a^2}\times\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$
$=3^3-3\times1\times3=18$

6. 令 $A=2^9+2^8+2^7+\cdots\cdots+2+1$
⇨ $(2-1)A=(2-1)\times(2^9+2^8+2^7+\cdots\cdots+2+1)$
$=2^{10}-1$
⇨ $A=2^{10}-1=1024-1=1023$

7. 令 $A=3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5$
⇨ $(3-2)A$
$=(3-2)\times(3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5)$
$=3^6-2^6$
$=729-64$
$=665$
⇨ $A=665$

8. 依題意，$((b^2)^2)^2=81^4$
⇨ $b^8=(3^4)^4$
⇨ $b^8=(3^2)^8$
得 $b=3^2=9$
故選(D)

綜合能力檢定 P.11

簡答

1. (D)　2. $\dfrac{5}{2}$　3. 40　4. (A)　5. 略

詳解

1. $(99.8)^2=(100-0.2)^2$
$=100^2-2\times100\times0.2+(0.2)^2$
$=9960.04$
故選(D)

2. 公式 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
⇨ $1^2=2+2ab$ ⇨ $ab=-\dfrac{1}{2}$
所求 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=1^3-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times1=\dfrac{5}{2}$

3. 依題意，$a^2-4a+2=0$

$\Rightarrow a-4+\frac{2}{a}=0 \Rightarrow a+\frac{2}{a}=4$

所求 $a^3+\frac{8}{a^3}=\left(a+\frac{2}{a}\right)^3-3\times a\times\frac{2}{a}\times\left(a+\frac{2}{a}\right)$

$=4^3-3\times2\times4$

$=40$

4. $a-c=(a-b)+(b-c)$

$=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$

所求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2+4^2]$

$=14$

故選(A)

5. $\alpha^n-\beta^n=0$

$\Rightarrow(\alpha-\beta)\times(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots$

$+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})=0$

$\because \alpha>0$ 且 $\beta>0$

$\therefore \alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}>0$ 恆成立

可得 $\alpha-\beta=0$

即 $\alpha=\beta$

單元 2 根式運算

★ 國中基礎能力檢定 P.14

簡答

1. 6　2. $2\sqrt{3}$　3. 720　4. (D)　5. 10　6. 3
7. (A)　8. 11　9. (C)　10. (D)　11. $14+6\sqrt{3}$
12. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

詳解

1. 依題意，$x^2-12x+45=(\pm3)^2$

$\Rightarrow x^2-12x+36=0$

$\Rightarrow (x-6)^2=0 \Rightarrow x=6$

2. $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}$

$=4(2\sqrt{3})+2(3\sqrt{3})-3(4\sqrt{3})$

$=8\sqrt{3}+6\sqrt{3}-12\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

3. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{9}\times\sqrt{10}$

$=\sqrt{2\times3\times4\times5\times6\times8\times9\times10}$

$=\sqrt{2^8\times3^4\times5^2}$

$=2^4\times3^2\times5=720$

4. $a=2\sqrt{6}=\sqrt{24}$

$b=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$

$c=4\sqrt{2}=\sqrt{32}$

$\therefore c>b>a$

故選(D)

5. $\sqrt{108-n}$ 為正整數

則 $108-n$ 可以是 1^2，2^2，3^2，4^2，……，10^2，

總共 10 種情形

故符合條件的 n 有 10 個

6. $\sqrt{108\times n}=\sqrt{2^2\times3^3\times n}$

故使得 $\sqrt{108\times n}$ 為正整數的最小 n 值為 3

7. 已知 $-3<a<1$

所求 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$

$=|a-1|+|a+3|$

$=(1-a)+(a+3)$

$=4$

故選(A)

8. 兩數之和為 $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})$

$=4$

兩數之積為 $ab=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})$

$=2^2-(\sqrt{3})^2$

$=1$

所求為 $a^2-3ab+b^2$

$=(a+b)^2-5ab$

$=4^2-5\times1=11$

9. 可得 $\overline{OP}=\overline{OB}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

所以 P 之坐標為 $2\sqrt{10}$

故選(C)

10. 螢幕寬度為 $\sqrt{6.1^2-5^2}=\sqrt{12.21}\approx3.5$(吋)

故選(D)

11. 乙之邊長為 $\sqrt{6}$，丙之邊長為 $\sqrt{2}$

得 $\begin{cases}\overline{AD}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ \overline{CD}=2\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{cases}$

故長方形 $ABCD$ 面積為

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times(2\sqrt{6}+\sqrt{2})=14+6\sqrt{3}$

12. 設 $\overline{DE}=\overline{EF}=x$

在△ABF 中，$\overline{BF}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AB}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}$

$=4$

故 $\overline{CF}=1$

在△EFC 中，$x^2=(3-x)^2+1^2 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

在△AEF 中，$\overline{AE}=\sqrt{5^2+x^2}$

$=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5\sqrt{10}}{3}$

高中先修課程 P.17

例題 1

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}$
$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{6\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$
$=\dfrac{6\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$
$=2\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})$
$=2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2\times(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)\times(\sqrt{5}-1)}$
$=\dfrac{2\times(\sqrt{5}-1)}{4}$
$=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

練習 1

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$
$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{4\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$
$=\dfrac{4\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$
$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+1)}$
$=\dfrac{2\times(\sqrt{5}+1)}{4}$
$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

例題 2

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}$
$=\sqrt{2}+1$

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$
$=\sqrt{2}-1$

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\sqrt{24}}$
$=\sqrt{8}+\sqrt{3}$
$=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{14-\sqrt{96}}=\sqrt{14-2\sqrt{24}}$
$=\sqrt{12}-\sqrt{2}$
$=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

練習 2

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}$
$=\sqrt{3}+1$

(2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{1}$
$=\sqrt{3}-1$

(3) $\sqrt{18+6\sqrt{5}}=\sqrt{18+2\sqrt{45}}$
$=\sqrt{15}+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{14-\sqrt{180}}=\sqrt{14-2\sqrt{45}}$
$=\sqrt{9}-\sqrt{5}$
$=3-\sqrt{5}$

先修銜接能力檢定 P.19

簡答

1. 1　2. $\sqrt{2}+2$　3. 9　4. $\sqrt{5}-1$　5. $\sqrt{10}-3$
6. $4-\sqrt{10}$　7. 6　8. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

詳解

1. $\phi^2+\phi=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
$=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
$=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{2\sqrt{5}-2}{4}$
$=\dfrac{4}{4}=1$

2. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$
$=\dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})}$
$+\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})}$
$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$
$=\sqrt{2}+2$

3. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots$

$+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{1}+\cdots\cdots$

$+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1}$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=9$

4. $\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
$=\sqrt{5}-\sqrt{1}$
$=\sqrt{5}-1$

5. $\sqrt{14+4\sqrt{10}}=\sqrt{14+2\sqrt{40}}$
$=\sqrt{10}+\sqrt{4}$
$=\sqrt{10}+2$
$=5+(\sqrt{10}-3)$

可得 $a=5$，$b=\sqrt{10}-3$

所求 $b=\sqrt{10}-3$

6. $\sqrt{35-10\sqrt{10}}=\sqrt{35-2\sqrt{250}}$
$=\sqrt{25}-\sqrt{10}$
$=5-\sqrt{10}$
$=1+(4-\sqrt{10})$

可得 $a=1$，$b=4-\sqrt{10}$

所求 $b=4-\sqrt{10}$

7. $x=\sqrt{2}-1$

⇨ $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}$
$=\frac{\sqrt{2}+1}{1}$
$=\sqrt{2}+1$

$x+\frac{1}{x}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)$
$=2\sqrt{2}$

所求 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$
$=(2\sqrt{2})^2-2$
$=6$

8. $\overline{BC}=1$ ⇨ $\overline{BD}=2$ 且 $\overline{CD}=\sqrt{3}$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}=2$（∵△$ABD$ 為等腰三角形）

所求 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$
$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}$
$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$
$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$
$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

綜合能力檢定 P.21

簡答

1. 117　2. (B)　3. $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$　4. 98　5. $\sqrt{2}-1$

詳解

1. $\sqrt{108}\leq\sqrt{a}<15$

⇨ $\sqrt{108}\leq\sqrt{a}<\sqrt{225}$

滿足條件的 a 可以是 108，109，……，224

共有 117 個

2. $10<\sqrt{108}<11$

⇨ $2029<2019+\sqrt{108}<2030$

檢查：$\begin{cases}45^2=2025\\46^2=2116\end{cases}$

可知 $45<\sqrt{2019+\sqrt{108}}<46$

且 $\sqrt{2019+\sqrt{108}}$ 最接近 45

故選(B)

3. $\frac{6}{\sqrt{7+\sqrt{40}}}=\frac{6}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$
$=\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$
$=\frac{6\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$
$=\frac{6\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$
$=2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})$
$=2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

4. $a=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
$=\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$

⇨ $\frac{1}{a}=\frac{1}{5-2\sqrt{6}}=\frac{1\times(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})\times(5+2\sqrt{6})}$
$=\frac{5+2\sqrt{6}}{1}=5+2\sqrt{6}$

$\therefore a+\frac{1}{a}=(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})=10$

所求 $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$
$=10^2-2=98$

5. $\overline{BC}=1$ ⇨ $\overline{BD}=\sqrt{2}$ 且 $\overline{CD}=1$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{2}$（∵△$ABD$ 為等腰三角形）

所求 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$
$=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

單元 3 數列與級數

★ 國中基礎能力檢定 P.24

簡答

1. 30　2. 2　3. 11　4. 29　5. 5050　6. 50
7. 1552　8. 16　9. 24　10. 330　11. (A)　12. 465

詳解

1. 首項 $a_1=100$，公差 $d=98-100=-2$
所求第 36 項 $a_{36}=a_1+35d$
$=100+35\times(-2)$
$=30$

2. 首項 $a_1=-50$，第 51 項 $a_{51}=50$
由 $a_{51}=a_1+50d$
⇨ $50=-50+50d$
⇨ $d=2$
所求公差 $d=2$

3. 設首項為 a_1，公差為 d
$\begin{cases}a_3=a_1+2d=9\\a_9=a_1+8d=3\end{cases}$
⇨ $\begin{cases}a_1=11\\d=-1\end{cases}$
所求首項 $a_1=11$

4. 由第三列：3，f，-25 成等差
⇨ $f=\dfrac{3+(-25)}{2}=-11$
由第二行：b，9，f 成等差
⇨ $9=\dfrac{b+f}{2}$
⇨ $9=\dfrac{b+(-11)}{2}$
⇨ $b=29$
所求 $b=29$

5. 首項 $a_1=1$，末項 $a_{100}=100$
總和為 $\dfrac{100\times(a_1+a_{100})}{2}=\dfrac{100\times(1+100)}{2}$
$=5050$

6. 設首項為 a_1，公差為 d
$\begin{cases}a_2=a_1+d=12\\a_9=a_1+8d=-2\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}a_1=14\\d=-2\end{cases}$
所有項的和為
$\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$
$=\dfrac{10}{2}\times[2\times14+(10-1)\times(-2)]$
$=50$

7. 第 6 組為$(2^5+1，2^5+2，2^5+3，\cdots\cdots，2^6)$
首項為 $2^5+1=33$
末項為 $2^6=64$
共有 $2^6-2^5=32$ 項
總和為 $\dfrac{32\times(33+64)}{2}=1552$

8. 首項 $a_1=-113$，公差 $d=(-105)-(-113)=8$
則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$
$=-113+(n-1)\times8>0$
⇨ $8(n-1)>113$
⇨ $n>15\dfrac{1}{8}$
符合條件的最小自然數為 16
故自第 16 項開始為正數

9. 周長為 24，得設三邊長為 $8-d$，8，$8+d$，
其中 $d>0$
直角三角形⇨$(8+d)^2=8^2+(8-d)^2$
⇨ $d=2$
可得三邊長為 6，8，10
所求面積為 $\dfrac{6\times8}{2}=24$

10. 已知 $a_6=20$ 且 $d=1$
由 $a_6=a_1+5d$ ⇨ $20=a_1+5\times1$
⇨ $a_1=15$
∴座位總數為 $\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$
$=\dfrac{15}{2}[2\times15+(15-1)\times1]$
$=330$(個)

11. 依題意 $n^2=\dfrac{(n+2)\times[1+(n+2)]}{2}$
⇨ $n^2-5n-6=0$
⇨ $(n-6)\times(n+1)=0$
⇨ $n=6$ 或 $n=-1$(不合)
∴全部的球有 $6^2=36$ 個
故選(A)

12. $1+2+3+4+\cdots\cdots+30=\dfrac{30\times(1+30)}{2}$
$=465$
∴大寶總共可以得到 465 元

高中先修課程 P.28

例題 1

(1) 公比 $r=\dfrac{a_2}{a_1}=4$

(2) $a_6=a_1r^5=2\times4^5=2048$

(3) $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $512=2\times4^{n-1}$
⇨ $4^{n-1}=256=4^4$
⇨ $n-1=4$
⇨ $n=5$
∴512 是此數列的第 5 項

練習 1

(1) 公比 $r=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

(2) $a_3=a_1r^2$ ⇨ $20=a_1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
⇨首項 $a_1=80$

(3) $a_8=a_1r^7=80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=\dfrac{5}{8}$

(4) $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $\dfrac{5}{256}=80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
⇨ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$
⇨ $n-1=12$
⇨ $n=13$
∴$\dfrac{5}{256}$ 是此數列的第 13 項

例題 2

(1) 首項 $a_1=1$，$r=2$
$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $128=1\times2^{n-1}$
⇨ $n=8$
此級數共有 8 項，總和為
$\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{1\times(2^8-1)}{2-1}=255$

(2) 首項 $a_1=2$，公比 $r=-2$
$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $128=2\times(-2)^{n-1}$
⇨ $n=7$
此級數共有 7 項，
總和為 $\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{2\times[1-(-2)^7]}{1-(-2)}$
$=86$

練習 2

(1) 首項 $a_1=1$，公比 $r=3$
$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $243=1\times3^{n-1}$
⇨ $3^{n-1}=3^5$
⇨ $n-1=5$
⇨ $n=6$
此級數有 6 項
總和為 $\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{1\times(3^6-1)}{3-1}$
$=364$

(2) 首項 $a_1=3$，公比 $r=-3$
$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $243=3\times(-3)^{n-1}$
⇨ $(-3)^{n-1}=81$
⇨ $n-1=4$
⇨ $n=5$
此級數共有 5 項
總和為 $\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{3[1-(-3)^5]}{1-(-3)}=183$

例題 3

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+100=\sum_{k=1}^{100}k$

(2) $1+3+5+7+\cdots\cdots+99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$

(3) $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10}=\sum_{k=1}^{10}2^k$

練習 3

(1) $2+4+6+\cdots\cdots+100=\sum_{k=1}^{50}2k$

(2) $3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{10}=\sum_{k=1}^{10}3^k$

先修銜接能力檢定 P.31

簡答

1. (A)(B)(D) 2. 16 3. (1) -2；(2) -8；(3) 9 4. 45
5. $\dfrac{15}{8}$ 6. $\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)$ 7. $\dfrac{364}{243}$ 8. 1073741823

詳解

1. (A) ○：公比 $r=1$
(B) ○：公比 $r=-1$
(C) ×：不是等比數列
(D) ○：公比 $r=\dfrac{1}{2}$
(E) ×：不是等比數列
故選(A)(B)(D)

2. 依題意，$12^2=9\times\alpha$ ⇨ $\alpha=16$

3. (1) 公比 $r=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{-32}{16}=-2$
(2) $a_2=a_1r$ ⇨ $16=a_1\times(-2)$
⇨ 首項 $a_1=-8$
(3) $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $-2048=(-8)\times(-2)^{n-1}$
⇨ $(-2)^{n-1}=256$
⇨ $n-1=8$
⇨ $n=9$
∴-2048 是第 9 項

4. 前 4 項的和 $S_4=\dfrac{a_1(r^4-1)}{r-1}=\dfrac{3\times(2^4-1)}{2-1}$
$=45$

解答篇

翰林用心 教師用 精益求精

5. 前 4 項的和

$$S_4=\frac{a_1(1-r^4)}{1-r}=\frac{3\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{15}{8}$$

6. $(3+5\times1)+(3^2+5\times2)+(3^3+5\times3)+\cdots\cdots$

$+(3^{10}+5\times10)=\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)$

7. 首項 $a_1=2$，公比 $r=-\frac{1}{3}$

此級數共有 6 項

總和為 $\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{2\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{364}{243}$

8. $1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{29}$

$=\frac{1\times(2^{30}-1)}{2-1}$

$=2^{30}-1$

$=1073741823$

∴二寶總共可以得到 1073741823 元

綜合能力檢定 P.33

簡答

1. (1) 2；(2) −3；(3) 11；(4) 12

2. (1) $\frac{1}{2}$；(2) 80；(3) $\frac{5}{8}$；(4) $\frac{315}{2}$　3. 102

4. 480　5. $\frac{3069}{64}$

詳解

1. (1) 設首項 a_1，公差 d

$\begin{cases}a_3=a_1+2d=1\\a_5=a_1+4d=5\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_1=-3\\d=2\end{cases}$

∴公差 $d=2$

(2) 首項 $a_1=-3$

(3) $a_8=a_1+7d=(-3)+7\times2$

$=11$

(4) 前 6 項的總和為

$\frac{6\times[2a_1+(6-1)\times d]}{2}$

$=\frac{6\times[2\times(-3)+5\times2]}{2}$

$=12$

2. (1) 設首項 a_1，公比 r

$\begin{cases}a_3=a_1r^2=20\\a_5=a_1r^4=5\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_1=80\\r=\pm\frac{1}{2}\text{（取正）}\end{cases}$

∴公比 $r=\frac{1}{2}$

(2) 首項 $a_1=80$

(3) $a_8=a_1r^7$

$=80\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$=80\times\frac{1}{128}$

$=\frac{5}{8}$

(4) 前 6 項的總和為

$\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{80\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{315}{2}$

3. $\sum_{k=1}^{4}(3^k-3k+3)$

$=(3^1-3\times1+3)+(3^2-3\times2+3)$

$+(3^3-3\times3+3)+(3^4-3\times4+3)$

$=3+6+21+72=102$

4. 已知座位數公差 $d=2$

設第 n 排座位數為 a_n

$a_7=a_1+6d\Rightarrow30=a_1+6\times2\Rightarrow a_1=18$

座位總數為 $\frac{15\times[2a_1+(15-1)\times d]}{2}$

$=\frac{15\times(2\times18+14\times2)}{2}=480$

∴共有 480 個座位

5. $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=6^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2^2}\right)^2+\left(\frac{6}{2^3}\right)^2+\left(\frac{6}{2^4}\right)^2$

$=\frac{6^2\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{4}}$ （註：首項為 6^2，公比為 $\frac{1}{4}$）

$=\frac{3069}{64}$（平方公分）

單元 4 坐標與函數

★ 國中基礎能力檢定 P.37

簡答

1. -3　2. (C)　3. 45　4. $(0,3)$　5. $\frac{12}{5}$

6. $\frac{1}{2}(x-1)^2+2$　7. (B)　8. (D)　9. 15　10. 2

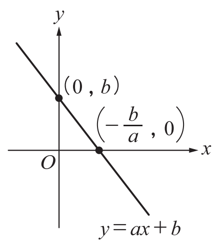
11. -1.6　12. $(-12,17)$

詳解

1. 所求為 $f(1)+f(2)+f(-3)$
$=(3\times1-1)+(3\times2-1)+[3\times(-3)-1]$
$=2+5+(-10)$
$=-3$

2.

x	0	$-\frac{b}{a}$
y	b	0



其中 $b>0$，$-\frac{b}{a}>0$

如右圖：$y=ax+b$ 圖形

不通過第三象限

故選(C)

3. $\begin{cases} f(66)=66a+b=89 \\ f(99)=99a+b=111 \end{cases}$

⇨ $\begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=45 \end{cases}$

$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x+45$

故所求 $f(0)=45$

4. ① 水平直線⇨ $a=0$
② 又通過 $(-4,3)$⇨ $b=3$
故所求數對 $(a,b)=(0,3)$

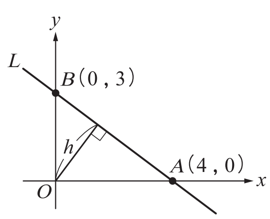
5. L：$3x+4y-12=0$

x	0	4
y	3	0

直線 L 與坐標軸交於 $A(4,0)$，$B(0,3)$

令 O 到 L 的最小距離為 h

如右圖



$h=\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{\overline{AB}}$

$=\frac{4\times3}{5}$

$=\frac{12}{5}$

6. 設 $f(x)=a(x-1)^2+2$

過 $(3,4)$，代入得 $4=4a+2$ ⇨ $a=\frac{1}{2}$

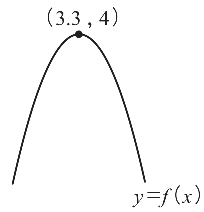
所求 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

7. $y=f(x)=-2(x-3.3)^2+4$ 的圖形開口向下，頂點為 $(3.3,4)$

若 x 值愈靠近 3.3，

則 $f(x)$ 值愈大

故選(B)

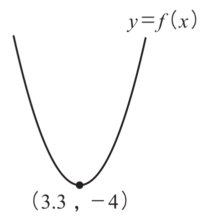


8. $y=f(x)=2(x-3.3)^2-4$ 的圖形開口向上，頂點為 $(3.3,-4)$

若 x 值離 3.3 愈遠，

則 $f(x)$ 值愈大

故選(D)



9. 令 $y=0$

⇨ $x^2+9x-36=0$

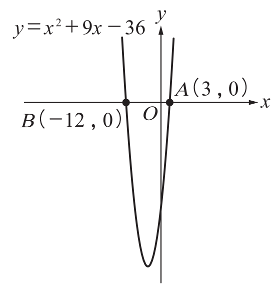
⇨ $(x-3)(x+12)=0$

⇨ $x=3$ 或 $x=-12$

設 $A(3,0)$，$B(-12,0)$

則 $\overline{AB}$ 的長度為

$|3-(-12)|=15$



10. $y=f(x)=x^2+3$ $\xrightarrow{\text{向右平移 } k \text{ 單位}}$

$y=f(x)=(x-k)^2+3$

過 $(0,7)$，代入得 $7=(0-k)^2+3$

⇨ $k^2=4$ ⇨ $k=\pm2$（取正 $\because k>0$）

所求 $k=2$

11. $20-0.6\times\frac{3600}{100}=-1.6$

故所求溫度為 -1.6 度

12. 由題圖可知

$y=2(x-3)^2-1=2(x^2-6x+9)-1$

$=2x^2-12x+17$

與 $y=2x^2+bx+c$ 同義

可得 $b=-12$，$c=17$

所求數對 $(b,c)=(-12,17)$

高中先修課程 P.41

例題 1

(1) $x=\frac{(-3)\times2+11\times5}{5+2}=7$

(2) 設 $P(x,y)$，則 $x=\frac{1\times3+11\times2}{2+3}=5$，

$y=\frac{(-3)\times3+12\times2}{2+3}=3$

$\therefore$ 點 $P(5,3)$

練習 1

(1) $x=\dfrac{3\times1+(-9)\times2}{2+1}=-5$

(2) 設 $Q(x，y)$

則 $x=\dfrac{(-3)\times3+4\times4}{4+3}=1$，

$y=\dfrac{2\times3+9\times4}{4+3}=6$

∴點 $Q(1，6)$

例題 2

(1) $f(x)=(x^2+4x)+3=(x^2+2\cdot2\cdot x+2^2)+3-2^2$

$=(x+2)^2-1$

∴頂點為 $(-2，-1)$

(2) $f(x)=-(x^2-2x)+5$

$=-(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2)+5+1^2$

$=-(x-1)^2+6$

∴頂點為 $(1，6)$

(3) $f(x)=3(x^2-6x)-27$

$=3(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)-27-3\cdot3^2$

$=3(x-3)^2-54$

∴頂點為 $(3，-54)$

練習 2

(1) $f(x)=(x^2-4x)+9$

$=(x^2-2\cdot2\cdot x+2^2)+9-2^2$

$=(x-2)^2+5$

∴頂點為 $(2，5)$

(2) $f(x)=-(x^2+2x)+5$

$=-(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)+5+1^2$

$=-(x+1)^2+6$

∴頂點為 $(-1，6)$

(3) $f(x)=-2(x^2+x)-2$

$=-2\left[x^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]-2+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

∴頂點為 $\left(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{3}{2}\right)$

先修銜接能力檢定 P.43

簡答

1. 3　2. −20　3. (3，1)　4. (−5，9)

5. (1) $(-2，-1)$；(2) $\left(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{7}{4}\right)$；

(3) $\left(-\dfrac{3}{2}，-\dfrac{15}{2}\right)$；(4) $\left(\dfrac{1}{6}，\dfrac{25}{12}\right)$

6. 168　7. 6　8. 450

詳解

1. $x=\dfrac{(-5)\times3+15\times2}{2+3}=3$

2. 依題意，$\dfrac{a+18}{2}=-1$

⇨ $a=-20$

3. 設 $Q(x，y)$

則 $x=\dfrac{1\times5+13\times1}{1+5}=3$

$y=\dfrac{(-2)\times5+16\times1}{1+5}=1$

∴點 $Q(3，1)$

4. 依題意，$\begin{cases}\dfrac{a+3}{2}=-1\\ \dfrac{-5+b}{2}=2\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}a=-5\\ b=9\end{cases}$

∴數對 $(a，b)=(-5，9)$

5. (1) $x^2+4x+3=(x^2+2\cdot2\cdot x+2^2)+3-2^2$

$=(x+2)^2-1$

∴數對 $(p，q)=(-2，-1)$

(2) $-x^2+x-2$

$=-(x^2-x)-2$

$=-\left[x^2-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]-2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$

∴數對 $(p，q)=\left(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{7}{4}\right)$

(3) $2x^2+6x-3$

$=2(x^2+3x)-3$

$=2\left[x^2+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right]-3-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{15}{2}$

∴數對 $(p，q)=\left(-\dfrac{3}{2}，-\dfrac{15}{2}\right)$

(4) $-3x^2+x+2$

$=-3\left(x^2-\dfrac{1}{3}x\right)+2$

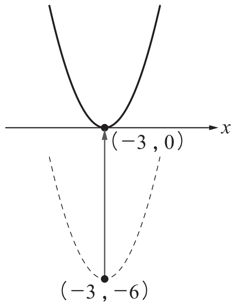
$=-3\left[x^2-2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot x+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\right]+2+3\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

$=-3\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{25}{12}$

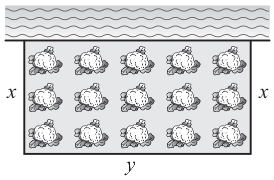
∴數對 $(p，q)=\left(\dfrac{1}{6}，\dfrac{25}{12}\right)$

6. $f(x)=2x^2-8x+m$
$=2(x^2-4x)+m$
$=2(x-2)^2+m-8$
當 $x=2$ 時，$f(x)$有最小值 $m-8$
即 $m-8=160 \Rightarrow m=168$

7. $y=x^2+6x+3$
$\Rightarrow y=(x+3)^2-6$
頂點為$(-3,-6)$
上移 6 單位，
新圖形和 x 軸恰交於一點
故所求 $k=6$



8. 如右圖，設長方形的兩邊分別為 x，y 公尺
$\Rightarrow 2x+y=60$
面積為 xy
$=x(60-2x)$
$=-2x^2+60x$
$=-2(x^2-30x)$
$=-2(x-15)^2+450$
當 $x=15$ 時，有最大值 450
∴最大面積為 450 平方公尺



綜合能力檢定 P.46

簡答

1. 10.94　2. 26　3. $(6,-3)$　4. (D)(E)　5. (D)

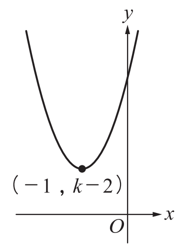
詳解

1. 依題意 $5.97=k\times50+1$
$\Rightarrow k=\dfrac{4.97}{50}$
可得 $p=\dfrac{4.97}{50}\times d+1$
當 $d=100$ 代入
$\Rightarrow p=\dfrac{4.97}{50}\times100+1$
$=10.94$(個大氣壓)

2. $f(x)=(x-2)^2+x^2+(x+5)^2$
$=3x^2+6x+29$
$=3(x^2+2x)+29$
$=3(x+1)^2+26$
當 $x=-1$ 時，$f(x)$有最小值 26

3. 設 $P(x,y)$
則 $x=\dfrac{1\times3+9\times5}{5+3}=6$，
$y=\dfrac{2\times3+(-6)\times5}{5+3}=-3$
∴點 $P(6,-3)$

4. $f(x)=2x^2+4x+k$
$=2(x^2+2x)+k$
$=2(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)+k-2\cdot1^2$
$=2(x+1)^2+k-2$
∴頂點為$(-1,k-2)$
如右圖
二次函數圖形和 x 軸沒有交點
$\Rightarrow$頂點$(-1,k-2)$在 x 軸上方
$\Rightarrow k-2>0$
$\Rightarrow k>2$
故選(D)(E)



5. 依題意，$|p-2|:|p-10|=\sqrt{7}:\sqrt{6}=1:\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$
$|q-2|:|q-10|=\sqrt{8}:\sqrt{7}=1:\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$
$|r-2|:|r-10|=\sqrt{6}:\sqrt{5}=1:\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
$\because \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}<\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}<\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$
∴r 最靠近 10，其次為 p，再其次為 q
得 $r>p>q$
故選(D)

單元 5 三角比

國中基礎能力檢定 P.50

簡答

1. 132　2. 110　3. 17　4. $\sqrt{5}$　5. 100
6. (1) $\dfrac{22}{3}$；(2) $\dfrac{4}{9}$　7. $2\sqrt{6}$　8. 144　9. $\dfrac{5}{2}$　10. 8
11. (1) $4\sqrt{2}$；(2) $16\sqrt{6}$　12. (1) $\sqrt{29}$；(2) $\sqrt{41}$

詳解

1. $\angle BAC=\dfrac{(5-2)\times180^\circ}{5}=108^\circ$
$\angle BAD=\dfrac{(6-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$
故$\angle CAD=360^\circ-108^\circ-120^\circ$
$=132^\circ$

2. 依外角定理
$\theta=50^\circ+(180^\circ-120^\circ)=110^\circ$

3. ∵三角形任意兩邊和大於第三邊，且任意兩邊差小於第三邊
可知 $16-9<x-5<16+9$
$\Rightarrow 12<x<30$
滿足條件的 x 可以是 13，14，15，……，29，共 17 個

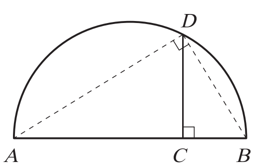
4. 由畢氏定理，依序求得
$\overline{OB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
⇨ $\overline{OC}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$
⇨ $\overline{OD}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}$
⇨ $\overline{OE}=\sqrt{1^2+(\sqrt{4})^2}=\sqrt{5}$
故 $\overline{OE}=\sqrt{5}$

5. 正方形 $ACHI$ 面積為 $\overline{AC}^2$
$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$
$=36+64$
$=100$

6. (1) $\overline{AD}:\overline{AB}=6:9=2:3$
$\overline{AE}:\overline{AC}=8:12=2:3$
⇨ $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$
⇨ $\triangle ADE\sim\triangle ABC$
可得 $\overline{DE}:\overline{BC}=2:3$
⇨ $\overline{DE}:11=2:3$
⇨ $\overline{DE}=\dfrac{22}{3}$

(2) $\triangle ADE$ 面積與 $\triangle ABC$ 面積的比值為
$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

7. 如右圖，作 $\overline{AD}$，$\overline{BD}$ 連線，依直角三角形母子相似定理可得

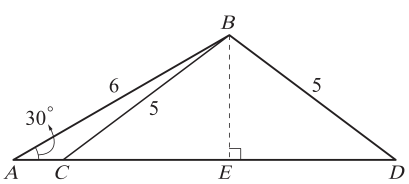


$\overline{CD}^2=\overline{AC}\times\overline{BC}$
$=8\times3=24$
故 $\overline{CD}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

8. $\angle1=180^\circ-108^\circ=72^\circ$
故 $\angle2=2\angle1=2\times72^\circ$
$=144^\circ$

9. 依內分比性質
$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{AC}=5:7$
故 $\overline{BD}=\dfrac{5}{5+7}\times\overline{BC}$
$=\dfrac{5}{12}\times6=\dfrac{5}{2}$

10. 如下圖，由 B 向 $\overline{AD}$ 作垂直線，垂足為 E



則 $\overline{BE}=\overline{AB}\times\dfrac{1}{2}=6\times\dfrac{1}{2}=3$
故 $\overline{CD}=2\times\sqrt{5^2-3^2}=2\times4=8$

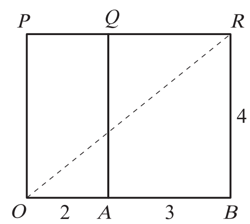
11. (1) ∵ H 為 $\triangle BCD$ 重心
∴延伸 BH 與 CD 交點即為 CD 中點，令此交點為 E
則 $\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BE}=\dfrac{2}{3}\times\left(4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=4$
故 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}$
$=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4^2}$
$=\sqrt{32}$
$=4\sqrt{2}$

(2) 正四面體體積為 $\dfrac{1}{3}\times\triangle BCD$ 面積 $\times\overline{AH}$
$=\dfrac{1}{3}\times\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\right]\times4\sqrt{2}$
$=16\sqrt{6}$

12. (1) 空間中，$\overline{OR}=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$ 為最短路徑長

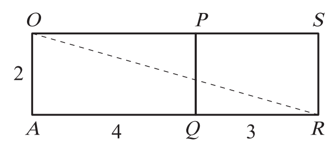
(2) 將長方體展開成平面，考慮下列兩個情形

①



⇨ $\overline{OR}=\sqrt{(2+3)^2+4^2}=\sqrt{41}$

②



⇨ $\overline{OR}=\sqrt{(4+3)^2+2^2}=\sqrt{53}$
綜合①、②，最短路徑長為 $\sqrt{41}$

高中先修課程 P.53

例題 1

(1) 底邊上的高為 $\sqrt{15^2-9^2}=12$
故 $x=\sqrt{13^2-12^2}=5$

(2) $\begin{cases} m^2-n^2=6^2-3^2=27 \\ m^2+n^2=6^2+3^2=45 \\ 2mn=2\times6\times3=36 \end{cases}$
∴三邊長為 27，36，45

練習 1

(1) $x=(3\times\sqrt{3})\times2$
$=6\sqrt{3}$

(2) $\begin{cases} m^2-n^2=5^2-1^2=24 \\ m^2+n^2=5^2+1^2=26 \\ 2mn=2\times5\times1=10 \end{cases}$
∴三邊長為 10，24，26

例題 2

(1) ① $x=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

② $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

(2) ① $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

② $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

練習 2

(1) ① $x=\sqrt{25^2-24^2}=7$

② $\sin\theta=\dfrac{7}{25}$

(2) ① $\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

② $\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\tan 45^\circ=\dfrac{1}{1}=1$

先修銜接能力檢定 P.56

簡答

1. 289　2. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；(2) $\dfrac{1}{2}$；(3) $\sqrt{3}$

3. (1) 2；(2) $2\sqrt{3}$　4. (1) 10；(2) $\dfrac{5}{13}$；(3) $\dfrac{5}{12}$

5. (1) 25；(2) 25；(3) 24

6. (1) $\dfrac{3}{5}$；(2) $\dfrac{4}{5}$；(3) $\dfrac{3}{4}$；(4) $\dfrac{4}{5}$；(5) $\dfrac{3}{5}$；(6) $\dfrac{4}{3}$

7. 12.59　8. 6

詳解

1. 正方形的面積為 $15^2+8^2=289$

2. (1) $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(3) $\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$
$=\sqrt{3}$

3. $\angle ABC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

(1) $x=4\times\dfrac{1}{2}=2$

(2) $y=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$=2\sqrt{3}$

4. (1) $x=\sqrt{26^2-24^2}=10$

(2) $\sin A=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$

(3) $\tan A=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$

5. (1) $x=\sqrt{24^2+7^2}=25$

(2) $x:(x+y)=7:14$ ⇨ $25:(25+y)=7:14$
⇨ $y=25$

(3) $24:(24+z)=7:14$ ⇨ $z=24$

6. (1) $\dfrac{3}{5}$；(2) $\dfrac{4}{5}$；(3) $\dfrac{3}{4}$；(4) $\dfrac{4}{5}$；(5) $\dfrac{3}{5}$；(6) $\dfrac{4}{3}$

7. $\tan 40^\circ=\dfrac{h}{15}$ ⇨ $0.8391\approx\dfrac{h}{15}$
⇨ $h\approx 15\times 0.8391\approx 12.5865\approx 12.59$

8. 設路燈 h 公尺
$3:(3+7)=1.8:h$
⇨ $3h=18$
⇨ $h=6$
∴路燈高度為 6 公尺

綜合能力檢定 P.58

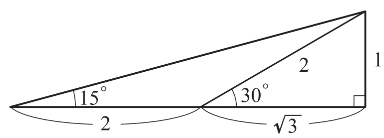
簡答

1. $2-\sqrt{3}$　2. 6　3. 24　4. $\dfrac{1}{6}$

5. $60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$

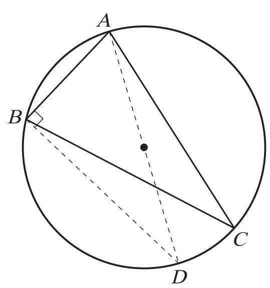
詳解

1. 如右圖



$\tan 15^\circ=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$
$=2-\sqrt{3}$

2. 設圓半徑為 R
如下圖，作直徑 $\overline{AD}$



$\angle ADB=\angle ACB=30^\circ$
在△ABD 中，$\angle ABD=90^\circ$
(半圓內圓周角 90°)
$\sin 30^\circ=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ ⇨ $\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{2R}$ ⇨ $R=6$
∴外接圓半徑為 6

3. 斜邊為 $\sqrt{6^2+8^2}=10$

陰影部分面積為

$\frac{1}{2}\times 3^2\pi+\frac{1}{2}\times 4^2\pi-\left(\frac{1}{2}\times 5^2\pi-\frac{6\times 8}{2}\right)$

$=24$

(註:陰影部分面積=直角三角形面積)

4. $\overline{AP}=\frac{1}{2}\overline{AB}$,$\overline{QR}=\frac{1}{3}\overline{AC}$

故 $\frac{\triangle PQR\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

5. 設木棍 $\overline{AB}=\overline{A'B'}=x$ 公分

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}x \\ \overline{B'C}=\frac{\sqrt{3}}{2}x \end{cases}$

$\therefore \overline{B'C}-\overline{BC}=30$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}x=30$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}x=30$

$\Rightarrow x=\frac{60}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

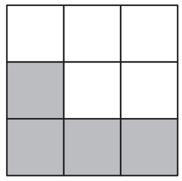
$=60(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$

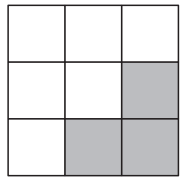
$\therefore$ 木棍長度為 $60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$ 公分

單元 6 立體圖與三視圖

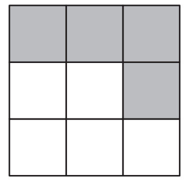
例題 1



前視圖

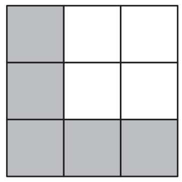


右視圖

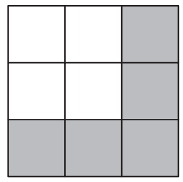


俯視圖

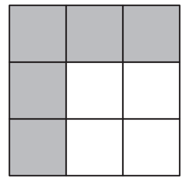
練習 1



前視圖



右視圖



俯視圖

例題 2

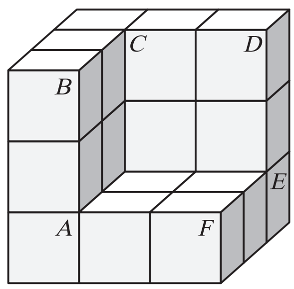
(C)

練習 2

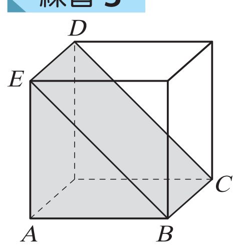
(A)

例題 3

由上方實線是視線所能看見的邊長、點、角度,繪製在空間坐標中,或繪製在紙箱上,我們可以猜測出原立體圖形,應該如下圖所示



練習 3



Notes

高中數學先修教材

編 著 者：黃天賜

企劃編輯：周郁華

責任編輯：吳崇欽．陳盈如

美術編輯：方淑莉．蔡佳岐

封面設計：黃屏慈

插　　畫：鄭妃雅．周秋慧．黃慧貞

出 版 者：翰林出版事業股份有限公司

印 刷 者：翰林出版事業股份有限公司

總 公 司：70248 臺南市南區新樂路 76 號
電話：(06)2631188
傳眞：(06)2640416

教材勘誤：翰林官網／Q&A專區／勘誤啟事

廣告代理商：福廣廣告事業有限公司
電話：(02)27555898

翰林官網：http://www.hle.com.tw

網路購書

翰林書城：http://books.hanlin.com.tw

書城提供 ATM、線上刷卡及貨到付款的服務，建議您可以直接至翰林書城訂購，約 3 ～ 4 個工作天即可收到書（不含假日）。

讀者服務

客服專線：(06)2637923

客服信箱：hlservice@hanlin.com.tw

本書如有缺頁、倒裝、漏印、嚴重汙損等情形，請接受本公司誠摯的道歉；並請撥打客服專線告知，我們將迅速爲您服務。