前言

國中已畢業，高中未開學前的暑假是一段相當美好的假期。然而快樂的時光總是過得特別快，當你翻開這本書的時候，意味著高中新生活即將展開。是的，就當作是為了一場球賽前的熱身吧！藉由演練本書，喚起全身的細胞，活動筋骨與思路，為高中學習階段做好充足的準備。

本書以簡明、好教、易學為原則，總共分成六大單元：

一、乘法公式
二、根式運算
三、數列與級數
四、坐標與函數
五、三角比
六、立體圖與三視圖

一至五單元皆有兩階段：
第一階段「國中複習」：
嚴選國中學過的觀念，可作為高中學習的基礎，並提供十二題「國中基礎能力檢定」。
第二階段「高中先修課程」：
提示高中即將展開的部分內容，並提供八題「先修銜接能力檢定」。最後有五題「綜合能力檢定」。

第六單元主要複習國中所學內容，未來將會應用在不同的高中課程單元。

本書的完成，期望能提供一份學生可以自行學習的教材。在架構上，也希望能提供教師同仁在課堂教學上的便利，不論是單元的選擇，時間的掌控，作業的編派都可以藉由本書的設計順利地執行。

本書的編寫理念期許能為高中數學教師的教學及未來的高一學生提供一份有效且好用的銜接教材，在編寫過程力求完美，如有疏漏或未盡合宜，敬請各位數學先進不吝指教。

編者　謹識

目 次

單元 1 乘法公式

國中複習

1. 運算法則

⑴ 交換律：$a+b=b+a$；$a\times b=b\times a$。

⑵ 結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$。

⑶ 分配律：① $a\times(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$。

② $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。

2. 最簡分數

若一個分數的分子與分母互質，則稱此分數為最簡分數。

3. 乘法公式

⑴ 和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

⑵ 差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

⑶ 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

⑷ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$。

4. 公式的變化

⑴ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$。

⑵ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$。

⑶ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$。

⑷ $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$。

⑸ $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$。

5. 指數律

設 $a\neq 0$，$b\neq 0$，m、n 為正整數，則：

⑴ $a^m\times a^n=a^{m+n}$。

⑵ $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

⑶ $(a^m)^n=a^{mn}$。

⑷ $(a\times b)^m=a^m\times b^m$。

6. 科學記號

將一個正數 a 表成 $a=b\times 10^n$ 的型式，其中 n 為整數，且 $1\leq b<10$。

國中基礎能力檢定

1. 已知 $15\times16\times17=4080$，則 $(-15)\times(-16)\times(-17)=$ $\underline{\quad -4080 \quad}$。

解 $(-15)\times(-16)\times(-17)$

$=-(15\times16\times17)$

$=-4080$

2. 計算 $(88.8)^2-(11.2)^2=$ $\underline{\quad 7760 \quad}$。

解 $(88.8)^2-(11.2)^2=(88.8+11.2)\times(88.8-11.2)$

$=100\times77.6$

$=7760$

3. 計算 $(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3=$ $\underline{\quad 64 \quad}$。

解 $(3-\sqrt{5})^3(3+\sqrt{5})^3=[(3+\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})]^3$

$=[3^2-(\sqrt{5})^2]^3$

$=4^3$

$=64$

4. 已知 $108\times25=2700$，計算 $108\times25^3-2699\times25^2=$ $\underline{\quad 625 \quad}$。

解 $108\times25^3-2699\times25^2$

$=25^2\times(108\times25-2699)$

$=625\times(2700-2699)$

$=625$

5. 計算 $\dfrac{2019^2-2\times2019+1}{2018}-\dfrac{108^2+2\times108\times1911+1911^2}{2019}=$ $\underline{\quad -1 \quad}$。

解 $\dfrac{2019^2-2\times2019+1}{2018}-\dfrac{108^2+2\times108\times1911+1911^2}{2019}$

$=\dfrac{(2019-1)^2}{2018}-\dfrac{(108+1911)^2}{2019}$

$=\dfrac{2018^2}{2018}-\dfrac{2019^2}{2019}$

$=2018-2019$

$=-1$

6. 已知 $a-b=10$，$ab=-6$，則 $a^2+b^2=$ __88__ 。

解 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=10^2+2\times(-6)$

$=100-12=88$

7. 已知 $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=3$，則 $\dfrac{\beta+1}{\alpha}+\dfrac{\alpha+1}{\beta}=$ __12__ 。

解 $\dfrac{\beta+1}{\alpha}+\dfrac{\alpha+1}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(6^2-2\times3)+6}{3}$

$=12$

8. 已知 a，b，c，d 為實數，且 $(a^2+2a+1)+\left(b^2+b+\dfrac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\dfrac{1}{4}\right)+(d^2-2d+1)=0$，則 $a+b+c+d=$ __0__ 。

解 $(a^2+2a+1)+\left(b^2+b+\dfrac{1}{4}\right)+\left(c^2-c+\dfrac{1}{4}\right)+(d^2-2d+1)=0$

$\Rightarrow (a+1)^2+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\dfrac{1}{2}\right)^2+(d-1)^2=0$

$\because a$，b，c，d 為實數

$\therefore a+1=0$，且 $b+\dfrac{1}{2}=0$，且 $c-\dfrac{1}{2}=0$，且 $d-1=0$

得 $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{1}{2}$，$d=1$

所求 $a+b+c+d=(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}+1=0$

9. 已知 $x^2-3x+1=0$，則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ __7__ 。

解 $x^2-3x+1=0 \Rightarrow x-3+\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=3$

所求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

10. 已知 $A=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$，則 A 的個位數字為何？

(A) 0　(B) 2　(C) 6　(D) 8。

答 (A)。

解 利用平方差公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$A=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$
$=(3^{16}-1)(3^{16}+1)$
$=3^{32}-1$

檢查 $3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，$3^5=243$，……

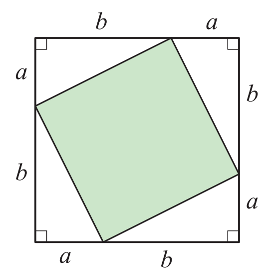
可知 3^n 的個位數依 3，9，7，1，3，9，7，1，……循環

$\therefore 3^{32}$ 的個位數為 1

即 $A=3^{32}-1$ 的個位數字為 0

故選(A)

11. 如右圖，鋪色部分的面積可以下列哪一個選項表示？



(A) a^2-b^2　(B) a^2+b^2　(C) $2ab$　(D) $2\sqrt{2}\,ab$。

答 (B)。

解 鋪色部分面積為 $(a+b)^2-\dfrac{ab}{2}\times4=a^2+b^2$

故選(B)

12. 所謂「PM 2.5」是指粒徑小於 2.5 微米的細微懸浮微粒，而登革熱病毒則是直徑約 30～50 奈米的球形病毒。已知 1 微米 $=10^{-6}$ 公尺，1 奈米 $=10^{-9}$ 公尺，試問 2.5 微米是 50 奈米的多少倍？

(A) 5 倍　(B) 20 倍　(C) 50 倍　(D) 200 倍。

答 (C)。

解 所求為 $\dfrac{2.5\text{ 微米}}{50\text{ 奈米}}=\dfrac{2.5\times10^{-6}\text{ 公尺}}{50\times10^{-9}\text{ 公尺}}$

$=\dfrac{2500\times10^{-9}\text{ 公尺}}{50\times10^{-9}\text{ 公尺}}$

$=50$（倍）

故選(C)

高中先修課程

銜接焦點 1　立方公式

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

說明：

(1) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

(2) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$
$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$。

(4) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$。

例題 1

已知 $a+b=5$，$ab=-3$，則：

(1) $a^2+b^2=$ ＿31＿。

(2) $a^3+b^3=$ ＿170＿。

解 (1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=5^2-2\times(-3)=31$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=5^3-3\times(-3)\times5$
$=170$

練習 1

已知 $a-b=3$，$ab=1$，則：

(1) $a^2+b^2=$ ＿11＿。

(2) $a^3-b^3=$ ＿36＿。

解 (1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$=3^2+2\times1=11$

(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=3^3+3\times1\times3$
$=36$

銜接焦點 2 公式推廣

1. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$。

2. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$。

說明：

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)+3\cdot x\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$。

(2) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)+3\cdot x\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x}\right)^3=x^3-\dfrac{1}{x^3}-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$。

(3) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$。

(4) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots\cdots+1)$。

例題 2

已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，則：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ ＿7＿ 。

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=$ ＿18＿ 。

解

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

$=3^2-2=7$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\times3$

$=18$

練習 2

已知 $x-\dfrac{1}{x}=5$，則：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ ＿27＿ 。

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=$ ＿140＿ 。

解

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

$=5^2+2=27$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=5^3+3\times5$

$=140$

先修銜接能力檢定

1. 已知 $a=99$，$b=1$，則 $a^3+b^3=$ ___970300___。

解 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(99+1)^3-3\times99\times1\times(99+1)$
$=100^3-3\times99\times100$
$=970300$

2. 已知 $a-b=5$，$ab=3$，則 $a^4b-ab^4=$ ___510___。

解 $a^4b-ab^4=ab(a^3-b^3)$
$=ab[(a-b)^3+3ab(a-b)]$
$=3\times(5^3+3\times3\times5)$
$=510$

3. 已知 $a+b=3$，$ab=1$，則 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=$ ___18___。

解 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{b^3+a^3}{ab}=\dfrac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$
$=\dfrac{3^3-3\times1\times3}{1}$
$=18$

4. 已知 $x-\dfrac{1}{x}=3$，則 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=$ ___36___。

解 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\times\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
$=3^3+3\times3$
$=36$

5. 已知 $a^2+\dfrac{1}{a^2}=3$，則 $a^6+\dfrac{1}{a^6}=$ ___18___。

解 $a^6+\dfrac{1}{a^6}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^3-3\times a^2\times\dfrac{1}{a^2}\times\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$

$=3^3-3\times1\times3$

$=18$

6. $2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ 之值為 ___1023___。

解 令 $A=2^9+2^8+2^7+\cdots\cdots+2+1$

⇨ $(2-1)A=(2-1)\times(2^9+2^8+2^7+\cdots\cdots+2+1)=2^{10}-1$

⇨ $A=2^{10}-1$

$=1024-1$

$=1023$

7. $3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5$ 之值為 ___665___。

解 令 $A=3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5$

⇨ $(3-2)A=(3-2)\times(3^5+3^4\times2+3^3\times2^2+3^2\times2^3+3\times2^4+2^5)$

$=3^6-2^6=729-64$

$=665$

⇨ $A=665$

8. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^4。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 9。

答 ___(D)___。

解 依題意，$((b^2)^2)^2=81^4$

⇨ $b^8=(3^4)^4$

⇨ $b^8=(3^2)^8$

得 $b=3^2=9$

故選(D)

綜合能力檢定

1. 小於$(99.8)^2$的最大整數為下列何者？

(A) 9990　(B) 9980　(C) 9970　(D) 9960。

答　(D)　。

解 $(99.8)^2=(100-0.2)^2$

$=100^2-2\times100\times0.2+(0.2)^2$

$=9960.04$

故選(D)

2. 設 a，b 為實數，若 $a+b=1$，$a^2+b^2=2$，則 $a^3+b^3=$ $\dfrac{5}{2}$ 。

解 公式$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

⇨ $1^2=2+2ab$

⇨ $ab=-\dfrac{1}{2}$

所求 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=1^3-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times1$

$=\dfrac{5}{2}$

3. 若 a 是方程式 $x^2-4x+2=0$ 的一個解，則 $a^3+\dfrac{8}{a^3}=$ 40 。

解 依題意，$a^2-4a+2=0$

⇨ $a-4+\dfrac{2}{a}=0$

⇨ $a+\dfrac{2}{a}=4$

所求 $a^3+\dfrac{8}{a^3}=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^3-3\times a\times\dfrac{2}{a}\times\left(a+\dfrac{2}{a}\right)$

$=4^3-3\times2\times4$

$=40$

4. 若 $a-b=2+\sqrt{2}$，$b-c=2-\sqrt{2}$，則 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 之值為下列何者？

(A) 14 (B) 28 (C) $4\sqrt{6}+4$ (D) $4\sqrt{6}-4$。

答 (A)。

解 $a-c=(a-b)+(b-c)$

$=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})$

$=4$

所求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2+4^2]$

$=14$

故選(A)

5. 已知 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$，若 $\alpha^n-\beta^n=0$，其中 n 為正整數，試說明 $\alpha=\beta$。

解 $\alpha^n-\beta^n=0$

$\Rightarrow(\alpha-\beta)\times(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})=0$

$\because\alpha>0$ 且 $\beta>0$

$\therefore\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}>0$ 恆成立

可得 $\alpha-\beta=0$

即 $\alpha=\beta$

單元 2

根式運算

國中複習

1. 平方根

已知 $a \geq 0$，則 $x^2=a$ 表示

⑴ a 是 x 的平方。

⑵ x 是 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$。

2. 根式

⑴ $\sqrt[2]{a}$ 稱為二次方根，可省略「2」簡寫為 $\sqrt{a}$。

⑵ $\sqrt[n]{a}$：其中稱 n 為開方次數，稱 a 為被開方數，稱 $\sqrt[n]{a}$ 為 a 的 n 次方根。

⑶ 二次根式 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a\text{，當 } a\geq 0\text{。} \\ -a\text{，當 } a<0\text{。} \end{cases}$

⑷ 若 a 為完全平方數，則 $\sqrt{a}$ 必為整數。

⑸ 若 $a=m^2\times k$，則 $\sqrt{a}=\sqrt{m^2\times k}=m\sqrt{k}$，其中 $m>0$ 且 $k>0$。

⑹ $\sqrt[3]{a^3}=a$。

⑺ 當 n 為奇數，則 $\sqrt[n]{a^n}=a$；

當 n 為偶數，則 $\sqrt[n]{a^n}=|a|$。

3. 同類方根

例如 $3\sqrt{2}$，$6\sqrt{2}$ 皆有「$\sqrt{2}$」，稱之為同類方根，可以加減乘除。

4. 同次方根

例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{11}$ 皆為「二次方根」，可乘除，不可加減。

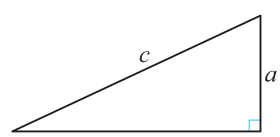
5. 根式的乘除

⑴ 若 a，b 為正數或 0，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。

⑵ 若 a，b 為任意實數，則 $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$。

⑶ 若 $a\geq 0$，$b>0$，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

⑷ 若 a，b 為任意實數，其中 $b\neq 0$，則 $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$。



圖㈠

6. 畢氏定理

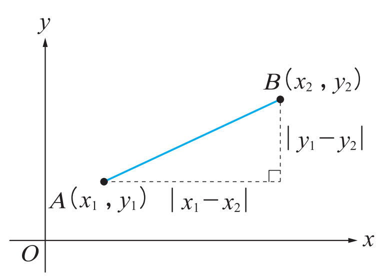
一個直角三角形兩股長分別為 a、b，斜邊為 c，

則 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，如圖㈠。

7. 距離公式

在直角坐標平面上，已知 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

則 A、B 兩點的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，如圖㈡。



圖㈡

國中基礎能力檢定

1. 若 $x^2-12x+45$ 的平方根為 ±3，則 $x=$ __6__ 。

解 依題意，$x^2-12x+45=(\pm3)^2$

$\Rightarrow x^2-12x+36=0$

$\Rightarrow (x-6)^2=0$

$\Rightarrow x=6$

2. 化簡 $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}=$ __$2\sqrt{3}$__ 。

解 $4\sqrt{12}+2\sqrt{27}-3\sqrt{48}$

$=4(2\sqrt{3})+2(3\sqrt{3})-3(4\sqrt{3})$

$=8\sqrt{3}+6\sqrt{3}-12\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

3. 化簡 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{9}\times\sqrt{10}=$ __720__ 。

解 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{9}\times\sqrt{10}$

$=\sqrt{2\times3\times4\times5\times6\times8\times9\times10}$

$=\sqrt{2^8\times3^4\times5^2}$

$=2^4\times3^2\times5$

$=720$

4. 已知 $a=2\sqrt{6}$，$b=3\sqrt{3}$，$c=4\sqrt{2}$，下列哪一個選項是正確的？

(A) $a>b>c$　(B) $b>c>a$　(C) $c>a>b$　(D) $c>b>a$。

答 __(D)__ 。

解 $a=2\sqrt{6}=\sqrt{24}$

$b=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$

$c=4\sqrt{2}=\sqrt{32}$

$\therefore c>b>a$

故選(D)

5. 若 n 為正整數且 $\sqrt{108-n}$ 亦為正整數，則符合條件的 n 有＿10＿個。

解 $\sqrt{108-n}$ 為正整數

則 $108-n$ 可以是 1^2，2^2，3^2，4^2，……，10^2，總共 10 種情形

故符合條件的 n 有 10 個

6. 若 n 為正整數且 $\sqrt{108\times n}$ 亦為正整數，則符合條件的最小 n 值為＿3＿。

解 $\sqrt{108\times n}=\sqrt{2^2\times 3^3\times n}$

故使得 $\sqrt{108\times n}$ 為正整數的最小 n 值為 3

7. 已知 $-3<a<1$，則 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$ 等於下列哪一個選項？

(A) 4　(B) -4　(C) $2a+2$　(D) $-2a-2$。

答 ＿(A)＿。

解 已知 $-3<a<1$

所求 $\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$

$=|a-1|+|a+3|$

$=(1-a)+(a+3)$

$=4$

故選(A)

8. 已知 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$，則 $a^2-3ab+b^2=$＿11＿。

解 兩數之和為 $a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

兩數之積為 $ab=(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

所求為 $a^2-3ab+b^2$

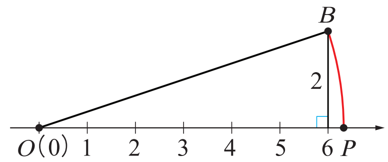
$=(a+b)^2-5ab$

$=4^2-5\times 1$

$=11$

9. 如右圖，以 $O(0)$ 為圓心，$\overline{OB}$ 為半徑畫弧，交數線於點 P，則點 P 的坐標為下列何者？

(A) $4\sqrt{5}$　(B) $3\sqrt{6}$　(C) $2\sqrt{10}$　(D) $\sqrt{38}$。



答 (C)。

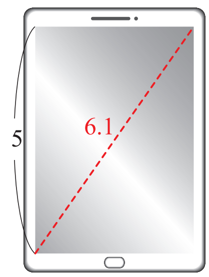
解 可得 $\overline{OP}=\overline{OB}=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

所以 P 之坐標為 $2\sqrt{10}$

故選(C)

10. 已知有一最新手機號稱為 6.1 吋螢幕(即對角線長 6.1 吋)，若螢幕長度為 5 吋，則螢幕寬度大約為多少吋？

(A) 2 吋　(B) 2.5 吋　(C) 3 吋　(D) 3.5 吋。

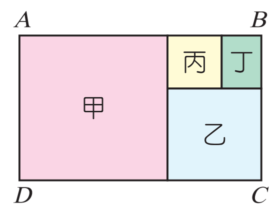


答 (D)。

解 螢幕寬度為 $\sqrt{6.1^2-5^2}=\sqrt{12.21}\approx 3.5$(吋)

故選(D)

11. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中，甲、乙、丙皆為正方形，若乙的面積為 6，丙的面積為 2，則長方形 $ABCD$ 的面積為 $14+6\sqrt{3}$。



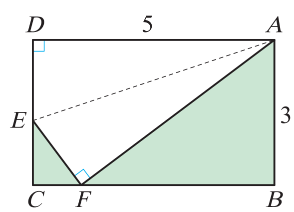
解 乙之邊長為 $\sqrt{6}$，丙之邊長為 $\sqrt{2}$

得 $\begin{cases}\overline{AD}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\\ \overline{CD}=2\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{cases}$

故長方形 $ABCD$ 面積為 $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times(2\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$=14+6\sqrt{3}$

12. 如右圖，$ABCD$ 為長方形，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$。今若將頂點 D 摺起與 $\overline{BC}$ 邊上的點 F 重合，則摺痕 $\overline{AE}$ 的長度為 $\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$。



解 設 $\overline{DE}=\overline{EF}=x$

在 $\triangle ABF$ 中，$\overline{BF}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，故 $\overline{CF}=1$

在 $\triangle EFC$ 中，$x^2=(3-x)^2+1^2 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$

在 $\triangle AEF$ 中，$\overline{AE}=\sqrt{5^2+x^2}$

$=\sqrt{5^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$

高中先修課程

銜接焦點 1　根式分母有理化

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$。

2. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$。

3. $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$。

4. $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$。

說明：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$。

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\times(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$。

(4) $\dfrac{1}{a-\sqrt{b}}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})\times(a+\sqrt{b})}=\dfrac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$。

例題 1

將下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ $\underline{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$。

(3) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$ $\underline{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$。

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$。

解

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{6\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\dfrac{6\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}=2\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})=2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2\times(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)\times(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{2\times(\sqrt{5}-1)}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

練習 1

將下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ 。

(3) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$ $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 。

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=$ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

解 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

(3) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{4\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\dfrac{4\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2\times(\sqrt{5}+1)}{4}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

銜接焦點 2 雙重根式的化簡

已知 $a\geq b\geq 0$，則：

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 。

說明：

已知 $a\geq b\geq 0$，則：

(1) $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=|\sqrt{a}+\sqrt{b}|=\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(2) $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=\sqrt{a}-\sqrt{b}$。

例題 2

化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$ $\sqrt{2}+1$ 。

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$ $\sqrt{2}-1$ 。

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=$ $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 。

(4) $\sqrt{14-\sqrt{96}}=$ $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 。

解 (1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1$

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{1}=\sqrt{2}-1$

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\sqrt{24}}=\sqrt{8}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{14-\sqrt{96}}=\sqrt{14-2\sqrt{24}}=\sqrt{12}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

練習 2

化簡下列雙重根式：

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=$ $\sqrt{3}+1$ 。

(2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=$ $\sqrt{3}-1$ 。

(3) $\sqrt{18+6\sqrt{5}}=$ $\sqrt{15}+\sqrt{3}$ 。

(4) $\sqrt{14-\sqrt{180}}=$ $3-\sqrt{5}$ 。

解 (1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$

(2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{1}=\sqrt{3}-1$

(3) $\sqrt{18+6\sqrt{5}}=\sqrt{18+2\sqrt{45}}=\sqrt{15}+\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{14-\sqrt{180}}=\sqrt{14-2\sqrt{45}}=\sqrt{9}-\sqrt{5}=3-\sqrt{5}$

先修銜接能力檢定

1. 設 $\phi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，則 $\phi^2+\phi=$ ＿1＿。

解 $\phi^2+\phi=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{2\sqrt{5}-2}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

2. 求值：$\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=$ ＿$\sqrt{2}+2$＿。

解 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}+2$

3. 求值：$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$ ＿9＿。

解 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{1}+\cdots\cdots+\dfrac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1}$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}$

$=-1+10$

$=9$

4. 化簡雙重根式 $\sqrt{6-\sqrt{20}}=$ ＿$\sqrt{5}-1$＿。

解 $\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{1}=\sqrt{5}-1$

5. 若 $\sqrt{14+4\sqrt{10}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $b=$ $\underline{\sqrt{10}-3}$ 。

解 $\sqrt{14+4\sqrt{10}}=\sqrt{14+2\sqrt{40}}=\sqrt{10}+\sqrt{4}=\sqrt{10}+2$
$=5+(\sqrt{10}-3)$

可得 $a=5$，$b=\sqrt{10}-3$

所求 $b=\sqrt{10}-3$

6. 若 $\sqrt{35-10\sqrt{10}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $b=$ $\underline{4-\sqrt{10}}$ 。

解 $\sqrt{35-10\sqrt{10}}=\sqrt{35-2\sqrt{250}}=\sqrt{25}-\sqrt{10}=5-\sqrt{10}$
$=1+(4-\sqrt{10})$

可得 $a=1$，$b=4-\sqrt{10}$

所求 $b=4-\sqrt{10}$

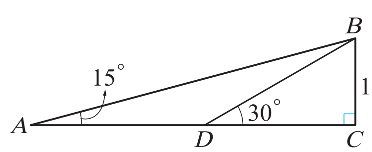
7. 已知 $x=\sqrt{2}-1$，則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ $\underline{6}$ 。

解 $x=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$

$x+\dfrac{1}{x}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$

所求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{2})^2-2=6$

8. 如右圖：$\angle C=90^\circ$，$\angle A=15^\circ$，$\angle BDC=30^\circ$，若 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{AB}=$ $\underline{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ 。



解 $\overline{BC}=1 \Rightarrow \overline{BD}=2$ 且 $\overline{CD}=\sqrt{3}$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}=2$（$\because \triangle ABD$ 為等腰三角形）

所求 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$
$=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}$
$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$
$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$
$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

綜合能力檢定

1. 若 a 為正整數，且 $\sqrt{108} \leq \sqrt{a} < 15$，則滿足條件的 a 有__117__個。

解 $\sqrt{108} \leq \sqrt{a} < 15 \Rightarrow \sqrt{108} \leq \sqrt{a} < \sqrt{225}$

滿足條件的 a 可以是 108，109，……，224

共有 117 個

2. 下列哪一個整數與 $\sqrt{2019+\sqrt{108}}$ 最接近？

(A) 44　(B) 45　(C) 46　(D) 47。

答 __(B)__。

解 $10 < \sqrt{108} < 11$

$\Rightarrow 2029 < 2019+\sqrt{108} < 2030$

檢查：$\begin{cases} 45^2 = 2025 \\ 46^2 = 2116 \end{cases}$

可知 $45 < \sqrt{2019+\sqrt{108}} < 46$

且 $\sqrt{2019+\sqrt{108}}$ 最接近 45

故選(B)

3. 化簡根式 $\dfrac{6}{\sqrt{7+\sqrt{40}}} =$__$2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$__。

解 $\dfrac{6}{\sqrt{7+\sqrt{40}}} = \dfrac{6}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

$= \dfrac{6\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$= \dfrac{6\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$

$= 2\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$= 2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

4. 已知 $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，則 $a^2+\dfrac{1}{a^2}=$ __98__ 。

解 $a=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{1}$

$=5-2\sqrt{6}$

⇨ $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}=\dfrac{1\times(5+2\sqrt{6})}{(5-2\sqrt{6})\times(5+2\sqrt{6})}$

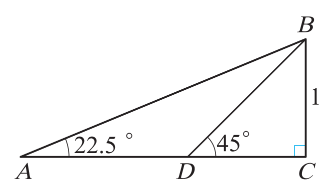
$=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{1}$

$=5+2\sqrt{6}$

$\therefore a+\dfrac{1}{a}=(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})=10$

所求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=10^2-2=98$

5. 如右圖：$\angle C=90°$，$\angle A=22.5°$，$\angle BDC=45°$，若 $\overline{BC}=1$，則 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 的值為__$\sqrt{2}-1$__。



解 $\overline{BC}=1$ ⇨ $\overline{BD}=\sqrt{2}$ 且 $\overline{CD}=1$

又 $\overline{AD}=\overline{BD}=\sqrt{2}$（$\because\triangle ABD$ 為等腰三角形）

所求 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}$

$=\sqrt{2}-1$

單元 3

數列與級數

國中複習

1. 數列

將一群數排成一列稱為數列，即 a_1，a_2，a_3，……，a_n，其中 a_1 為首項，a_n 為末項，此數列共有 n 項。

2. 等差數列

有一個數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，若滿足

$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}$（通常令此差距為 d，稱為公差），

則稱數列為等差數列。

3. 等差數列的第 n 項

一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則此數列的第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。

4. 等差中項

若 a，b，c 三數依序成等差數列，則 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

5. 級數

將一數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 用加號「＋」連結起來稱為級數，

即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

6. 等差級數

將一等差數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 用加號「＋」連結起來稱為等差級數，

即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

7. 等差級數的和

(1) 一個等差級數共有 n 項，首項為 a_1，公差為 d，則此等差級數和為

$S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$。

(2) 一個等差級數共有 n 項，首項為 a_1，末項為 a_n，則此等差級數和為

$S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$。

國中基礎能力檢定

1. 等差數列$\{a_n\}$如下：100，98，96，94，……，則此數列的第 36 項為__30__。

解 首項 $a_1=100$

公差 $d=98-100=-2$

所求第 36 項 $a_{36}=a_1+35d$

$=100+35\times(-2)$

$=30$

2. 等差數列$\{a_n\}$：-50，……，50，總共有 51 項，則此數列的公差為__2__。

解 首項 $a_1=-50$

第 51 項 $a_{51}=50$

由 $a_{51}=a_1+50d$

⇨ $50=-50+50d$

⇨ $d=2$

所求公差 $d=2$

3. 等差數列$\{a_n\}$的第 3 項 $a_3=9$，第 9 項 $a_9=3$，則首項 $a_1=$__11__。

解 設首項為 a_1，公差為 d

$$\begin{cases} a_3=a_1+2d=9 \\ a_9=a_1+8d=3 \end{cases}$$

⇨ $\begin{cases} a_1=11 \\ d=-1 \end{cases}$

所求首項 $a_1=11$

4. 如右圖，每一直行，每一橫列或任一對角線上的三數皆為等差數列，則 $b=$ ___29___ 。

a	b	c
d	9	e
3	f	-25

解 由第三列：3，f，-25 成等差

$\Rightarrow f=\dfrac{3+(-25)}{2}=-11$

由第二行：b，9，f 成等差

$\Rightarrow 9=\dfrac{b+f}{2}$

$\Rightarrow 9=\dfrac{b+(-11)}{2}$

$\Rightarrow b=29$

所求 $b=29$

5. 由 1 到 100 的所有正整數的和 $1+2+3+\cdots\cdots+100=$ ___5050___ 。

解 首項 $a_1=1$

末項 $a_{100}=100$

總和為 $\dfrac{100\times(a_1+a_{100})}{2}=\dfrac{100\times(1+100)}{2}=5050$

6. 等差數列 $\{a_n\}$ 共有 10 項，第 2 項 $a_2=12$，第 9 項 $a_9=-2$，則此數列的所有項的和為 ___50___ 。

解 設首項為 a_1，公差為 d

$\begin{cases} a_2=a_1+d=12 \\ a_9=a_1+8d=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1=14 \\ d=-2 \end{cases}$

所有項的和為 $\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$=\dfrac{10}{2}\times[2\times14+(10-1)\times(-2)]$

$=50$

7. 將所有正整數分組如下：

第 1 組：$(1, 2)$；第 2 組：$(3, 4)$；第 3 組：$(5, 6, 7, 8)$；……；

第 k 組：$(2^{k-1}+1, 2^{k-1}+2, \cdots\cdots, 2^k)$，其中 k 為大於 2 的正整數；……依此規律，

則第 6 組之中所有正整數的總和為__1552__。

解 第 6 組為$(2^5+1, 2^5+2, 2^5+3, \cdots\cdots, 2^6)$

首項為 $2^5+1=33$

末項為 $2^6=64$

共有 $2^6-2^5=32$ 項

總和為 $\dfrac{32\times(33+64)}{2}=1552$

8. 等差數列$\{a_n\}$首項為-113，第 2 項為-105，則此數列自第__16__項開始為正數。

解 首項 $a_1=-113$，公差 $d=(-105)-(-113)=8$

則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$

$=-113+(n-1)\times 8>0$

⇨ $8(n-1)>113$

⇨ $n>15\dfrac{1}{8}$

符合條件的最小自然數為 16

故自第 16 項開始為正數

9. 有一直角三角形三邊長成等差數列，若此三角形周長為 24，則此三角形的面積為__24__。

解 周長為 24，得設三邊長為 $8-d$，8，$8+d$，其中 $d>0$

直角三角形⇨$(8+d)^2=8^2+(8-d)^2$

⇨ $d=2$

可得三邊長為 6，8，10

所求面積為 $\dfrac{6\times 8}{2}=24$

10. 籃球場的看臺觀眾席 D 區有 15 排座位，此區每一排都比其前一排多 1 個座位，阿哲坐在第 6 排，發現此排共有 20 個座位，則觀眾席 D 區總共有 330 個座位。

解 已知 $a_6=20$ 且 $d=1$

由 $a_6=a_1+5d$ ⇨ $20=a_1+5\times1$ ⇨ $a_1=15$

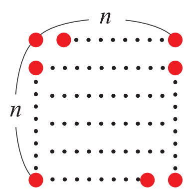
$\therefore$座位總數為 $\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

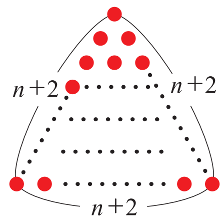
$=\frac{15}{2}[2\times15+(15-1)\times1]$

$=330$(個)

11. 有大小相同的球若干個，已知全部的球剛好可以排成一個每邊有 n 個球的正方形。若將全部的球改排成一個每邊 $n+2$ 個球的正三角形，也剛好用完所有的球。則可知全部的球有多少個？

(A) 36 個　(B) 64 個　(C) 100 個　(D) 144 個。





答 (A)。

解 依題意 $n^2=\frac{(n+2)\times[1+(n+2)]}{2}$

⇨ $n^2-5n-6=0$

⇨ $(n-6)\times(n+1)=0$

⇨ $n=6$ 或 $n=-1$(不合)

$\therefore$全部的球有 $6^2=36$ 個

故選(A)

12. 有一天大寶意外救了國王，國王很高興，答應給大寶一個請求。大寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 3 元，每天給的錢比前一天多 1 元，連續給 30 天。則大寶總共可以得到 465 元。

解 $1+2+3+4+\cdots\cdots+30=\frac{30\times(1+30)}{2}=465$

$\therefore$大寶總共可以得到 465 元

高中先修課程

銜接焦點 1 等比數列

有一個數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，若滿足 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$（通常令此比值為 r，稱為公比），則稱數列為等比數列。

說明：

(1) 等比數列首項 a_1，公比 r（其中 $a_1\neq0$，$r\neq0$），則此數列的前 n 項為 a_1，a_1r，a_1r^2，a_1r^3，……，a_1r^{n-1}。

(2) 首項 a_1，公比 r，則第 n 項 $a_n=a_1r^{n-1}$。

例題 1

已知數列 $\{a_n\}$ 為一等比數列，且 $a_1=2$，$a_2=8$，則：

(1) 此數列的公比為 4 。

(2) 第 6 項 $a_6=$ 2048 。

(3) 數字 512 是此數列的第 5 項。

解

(1) 公比 $r=\dfrac{a_2}{a_1}=4$

(2) $a_6=a_1r^5=2\times4^5=2048$

(3) $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $512=2\times4^{n-1}$ ⇨ $4^{n-1}=256=4^4$

⇨ $n-1=4$ ⇨ $n=5$

∴512 是此數列的第 5 項

練習 1

已知數列 $\{a_n\}$ 為一等比數列，若 $a_3=20$，$a_4=10$，則：

(1) 此數列的公比為 $\dfrac{1}{2}$ 。

(2) 此數列的首項為 80 。

(3) 第 8 項 $a_8=$ $\dfrac{5}{8}$ 。

(4) $\dfrac{5}{256}$ 是此數列的第 13 項。

解

(1) 公比 $r=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

(2) $a_3=a_1r^2$ ⇨ $20=a_1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ⇨首項 $a_1=80$

(3) $a_8=a_1r^7=80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=\dfrac{5}{8}$

(4) $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $\dfrac{5}{256}=80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ⇨ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}$

⇨ $n-1=12$ ⇨ $n=13$

∴$\dfrac{5}{256}$ 是此數列的第 13 項

銜接焦點 2　等比級數

▩ 將一等比數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 用加號「＋」連結起來稱為等比級數，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。

(1) 一個等比級數共有 n 項，首項為 a_1，公比 $r\neq1$，則此等比級數和為

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}。$$

(2) 一個等比級數共有 n 項，首項為 a_1，公比為 $r=1$，則此等比級數和為 $S_n=na_1$。

說明：

(1) 公比 $r\neq1$

$$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}\cdots\cdots\text{①}$$

$$rS_n=\quad a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots\cdots\quad+a_1r^{n-1}+a_1r^n\cdots\cdots\text{②}$$

由①－②可得 $(1-r)S_n=a_1-a_1r^n$ ⇨ $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$。

註：$S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$。

(2) 公比 $r=1$，則 $S_n=a_1+a_1+a_1+\cdots\cdots+a_1=na_1$（每一項都是 a_1）。

例題 2

試求下列等比級數的和：

(1) $1+2+4+8+\cdots\cdots+128=$ __255__。　　(2) $2-4+8-16+\cdots\cdots+128=$ __86__。

解 (1) 首項 $a_1=1$，$r=2$

$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $128=1\times2^{n-1}$ ⇨ $n=8$

此級數共有 8 項，總和為 $\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{1\times(2^8-1)}{2-1}=255$

(2) 首項 $a_1=2$，公比 $r=-2$

$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $128=2\times(-2)^{n-1}$ ⇨ $n=7$

此級數共有 7 項，總和為 $\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{2\times[1-(-2)^7]}{1-(-2)}=86$

練習 2

試求下列等比級數的和：

(1) $1+3+9+27+\cdots\cdots+243=$ __364__。　　(2) $3-9+27-81+\cdots\cdots+243=$ __183__。

解 (1) 首項 $a_1=1$，公比 $r=3$

$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $243=1\times3^{n-1}$ ⇨ $3^{n-1}=3^5$ ⇨ $n-1=5$ ⇨ $n=6$

此級數有 6 項

總和為 $\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\dfrac{1\times(3^6-1)}{3-1}=364$

(2) 首項 $a_1=3$，公比 $r=-3$

$a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $243=3\times(-3)^{n-1}$ ⇨ $(-3)^{n-1}=81$ ⇨ $n-1=4$ ⇨ $n=5$

此級數共有 5 項

總和為 $\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{3[1-(-3)^5]}{1-(-3)}=183$

銜接焦點 3 級數和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$

▨ 級數和常以 Σ（唸 *sigma* 或 *summation*）來表示，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$。

說明：

(1) 數列的一般項為 a_k。

(2) k 之值由下標的 1 到上標 n，依序表出 a_1，a_2，a_3，……，a_n，再相加起來。

例題 3

(1) 以 Σ 表示等差級數和 $1+2+3+\cdots\cdots+100=$ $\underline{\sum_{k=1}^{100} k}$。

(2) 以 Σ 表示等差級數和 $1+3+5+7+\cdots\cdots+99=$ $\underline{\sum_{k=1}^{50}(2k-1)}$。

(3) 以 Σ 表示等比級數和 $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10}=$ $\underline{\sum_{k=1}^{10} 2^k}$。

解

(1) $1+2+3+\cdots\cdots+100=\sum_{k=1}^{100} k$

(2) $1+3+5+7+\cdots\cdots+99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$

(3) $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10}=\sum_{k=1}^{10} 2^k$

練習 3

(1) 以 Σ 表示等差級數和 $2+4+6+\cdots\cdots+100=$ $\underline{\sum_{k=1}^{50} 2k}$。

(2) 以 Σ 表示等比級數和 $3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{10}=$ $\underline{\sum_{k=1}^{10} 3^k}$。

解

(1) $2+4+6+\cdots\cdots+100=\sum_{k=1}^{50} 2k$

(2) $3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{10}=\sum_{k=1}^{10} 3^k$

先修銜接能力檢定

1. 下列哪些數列是等比數列？（多選）

(A) 1，1，1，1，1　(B) 1，-1，1，-1，1　(C) -1，-1，1，1，-1

(D) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{80}$　(E) $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{25}$。

答　(A)(B)(D)　。

解 (A) ○：公比 $r=1$

(B) ○：公比 $r=-1$

(C) ×：不是等比數列

(D) ○：公比 $r=\frac{1}{2}$

(E) ×：不是等比數列

故選(A)(B)(D)

2. 已知 α，12，9 三數依序成等比數列，則 $\alpha=$　16　。

解 依題意，$12^2=9\times\alpha \Rightarrow \alpha=16$

3. 設 $\{a_n\}$ 是一個等比數列，且 $a_2=16$，$a_3=-32$，則：

(1) 公比 $r=$　-2　。

(2) 首項 $a_1=$　-8　。

(3) 數字 -2048 是此數列的第　9　項。

解 (1) 公比 $r=\frac{a_3}{a_2}=\frac{-32}{16}=-2$

(2) $a_2=a_1r \Rightarrow 16=a_1\times(-2) \Rightarrow$ 首項 $a_1=-8$

(3) $a_n=a_1r^{n-1} \Rightarrow -2048=(-8)\times(-2)^{n-1}$

$\Rightarrow (-2)^{n-1}=256 \Rightarrow n-1=8 \Rightarrow n=9$

$\therefore -2048$ 是第 9 項

4. 若一等比級數的首項為 $a_1=3$，公比為 2，則其前 4 項的和為　45　。

解 前 4 項的和 $S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}=\frac{3\times(2^4-1)}{2-1}=45$

翰林用心教師用精益求精

5. 若一等比級數的首項為 $a_1=3$，公比為 $-\frac{1}{2}$，則其前 4 項的和為 $\underline{\frac{15}{8}}$ 。

解 前 4 項的和 $S_4=\frac{a_1(1-r^4)}{1-r}=\frac{3\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{15}{8}$

6. 以 Σ 表示級數和 $(3+5\times1)+(3^2+5\times2)+(3^3+5\times3)+\cdots\cdots+(3^{10}+5\times10)=$ $\underline{\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)}$ 。

解 $(3+5\times1)+(3^2+5\times2)+(3^3+5\times3)+\cdots\cdots+(3^{10}+5\times10)=\sum_{k=1}^{10}(3^k+5k)$

7. 等比級數 $2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\frac{2}{81}-\frac{2}{243}$ 的和為 $\underline{\frac{364}{243}}$ 。

解 首項 $a_1=2$，公比 $r=-\frac{1}{3}$

此級數共有 6 項

總和為 $\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{2\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{364}{243}$

8. 有一天二寶意外救了國王，國王很高興，答應給二寶一個請求。二寶希望國王從今天起第一天給他 1 元，第二天給他 2 元，第三天給他 4 元，每天給的錢是前一天的兩倍，連續給 30 天，則二寶總共可得到 $\underline{\quad 1073741823 \quad}$ 元。

解 $1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{29}$

$=\frac{1\times(2^{30}-1)}{2-1}$

$=2^{30}-1$

$=1073741823$

∴二寶總共可以得到 1073741823 元

綜合能力檢定

1. 已知數列$\{a_n\}$為一等差數列，若 $a_3=1$，$a_5=5$，則此數列的

(1) 公差為__2__。　(2) 首項為__-3__。

(3) 第 8 項 $a_8=$__11__。　(4) 前 6 項的總和為__12__。

解 (1) 設首項 a_1，公差 d

$$\begin{cases} a_3=a_1+2d=1 \\ a_5=a_1+4d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=-3 \\ d=2 \end{cases}$$

$\therefore$公差 $d=2$

(2) 首項 $a_1=-3$

(3) $a_8=a_1+7d=(-3)+7\times2=11$

(4) 前 6 項的總和為 $\dfrac{6\times[2a_1+(6-1)\times d]}{2}$

$$=\frac{6\times[2\times(-3)+5\times2]}{2}=12$$

2. 已知數列$\{a_n\}$為一等比數列且公比大於 0，若 $a_3=20$，$a_5=5$，則此數列的

(1) 公比為__$\dfrac{1}{2}$__。　(2) 首項為__80__。

(3) 第 8 項 $a_8=$__$\dfrac{5}{8}$__。　(4) 前 6 項的總和為__$\dfrac{315}{2}$__。

解 (1) 設首項 a_1，公比 r

$$\begin{cases} a_3=a_1r^2=20 \\ a_5=a_1r^4=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=80 \\ r=\pm\dfrac{1}{2}\text{(取正)} \end{cases}$$

$\therefore$公比 $r=\dfrac{1}{2}$

(2) 首項 $a_1=80$

(3) $a_8=a_1r^7=80\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=80\times\dfrac{1}{128}=\dfrac{5}{8}$

(4) 前 6 項的總和為 $\dfrac{a_1(1-r^6)}{1-r}$

$$=\frac{80\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{315}{2}$$

3. 級數和 $\sum_{k=1}^{4}(3^k-3k+3)$之值為__102__。

解 $\sum_{k=1}^{4}(3^k-3k+3)=(3^1-3\times1+3)+(3^2-3\times2+3)+(3^3-3\times3+3)+(3^4-3\times4+3)$

$=3+6+21+72$

$=102$

4. 某電影院共有 15 排座位，已知每一排均比前排多 2 個座位，若第 7 排有 30 個座位，則可知電影院總共有__480__個座位。

解 已知座位數公差 $d=2$

設第 n 排座位數為 a_n

$a_7=a_1+6d \Rightarrow 30=a_1+6\times2$

$\Rightarrow a_1=18$

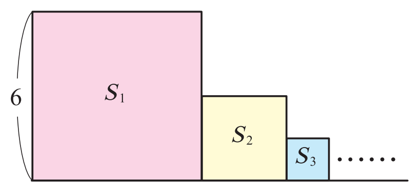
座位總數為 $\dfrac{15\times[2a_1+(15-1)\times d]}{2}$

$=\dfrac{15\times(2\times18+14\times2)}{2}$

$=480$

∴共有 480 個座位

5. 如右圖，有一邊長為 6 公分的正方形 S_1，若以 S_1 邊長的一半為邊長作一正方形 S_2，再以 S_2 邊長的一半為邊長再作一正方形 S_3，……，依此規律繼續操作，則 S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 的面積總和為__$\dfrac{3069}{64}$__平方公分。



解 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=6^2+\left(\dfrac{6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{6}{2^2}\right)^2+\left(\dfrac{6}{2^3}\right)^2+\left(\dfrac{6}{2^4}\right)^2$

$=\dfrac{6^2\times\left[1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right]}{1-\dfrac{1}{4}}$ （註：首項為 6^2，公比為 $\dfrac{1}{4}$）

$=\dfrac{3069}{64}$（平方公分）

單元 4

坐標與函數

國中複習

1. 數線

任意實數 a 都可以在數線上找到它對應的位置，如圖㈠。

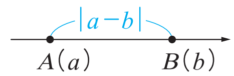
圖㈠

2. 絕對值

若 x 為任意數，則 $|x|$ 表示 x 到原點的距離。

3. 數線上兩點距離

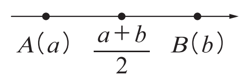
若數線上 $A(a)$，$B(b)$，則 A、B 兩點的距離為 $\overline{AB}=|a-b|$，如圖㈡。



圖㈡

4. 數線上中點公式

若數線上 $A(a)$，$B(b)$，則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\dfrac{a+b}{2}$，如圖㈢。



圖㈢

5. 平面直角坐標系

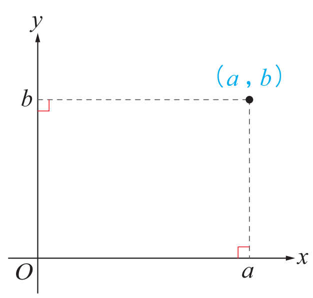
由兩條互相垂直的數線構成，平面上的所有點都有對應的坐標(a, b)，其中 a 稱為 x 坐標，b 稱為 y 坐標，如圖㈣。

6. 兩點距離

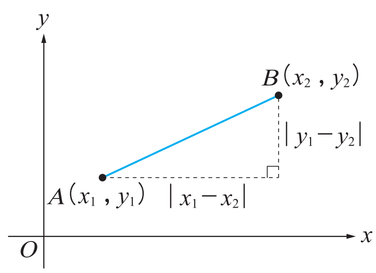
坐標平面上，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$兩點的距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，如圖㈤。

7. 中點坐標

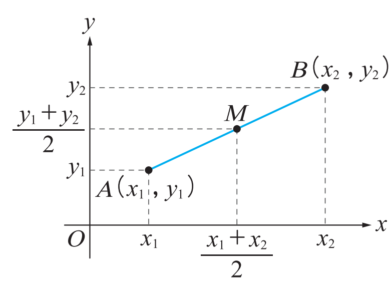
坐標平面上，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，如圖㈥。



圖㈣



圖㈤



圖㈥

8. 函數的意義

對於每一個 x 值，都恰有一個 y 值與之對應，則稱 y 是 x 的函數，以符號 $y=f(x)$表示。其中稱 x 為自變數，稱 y 為應變數。

9. 函數圖形

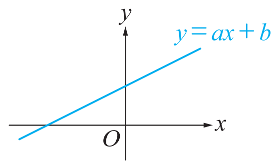
設 $y=f(x)$是一個函數，則在直角坐標平面上，所有這樣的點(x, y)所構成的圖形，即為此函數 $y=f(x)$的圖形。

10. 線型函數圖形

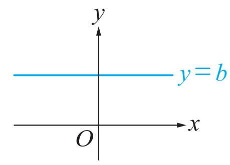
若 a，b 為實數，則 $y=f(x)=ax+b$ 稱為線型函數。

(1) 若 $a\neq 0$，則 $y=f(x)=ax+b$ 為一次函數，其圖形是一條斜直線，如圖(七)。

(2) 若 $a=0$，則 $y=b$ 為常數函數，其圖形是一條水平線，如圖(八)。



圖(七)



圖(八)

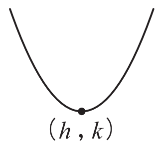
11. 二次函數的圖形

設二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$，則：

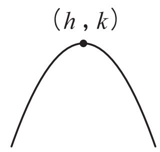
(1) $a>0$，圖形為開口向上的拋物線，頂點 (h,k) 為最低點，如圖(九)。

(2) $a<0$，圖形為開口向下的拋物線，頂點 (h,k) 為最高點，如圖(十)。

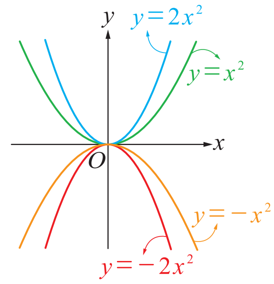
(3) $|a|$ 值愈大，則拋物線的開口愈小；$|a|$ 值愈小，則拋物線的開口愈大，如圖(十一)。



圖(九)



圖(十)



圖(十一)

12. 二次函數的最大值與最小值

設二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$，

(1) $a>0$，拋物線的開口向上，則在 $x=h$ 時，y 有最小值 k。

(2) $a<0$，拋物線的開口向下，則在 $x=h$ 時，y 有最大值 k。

13. 二次函數的圖形的平移

已知 $h>0$，$k>0$

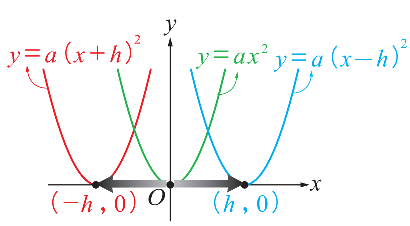
(1) 右移 h 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=a(x-h)^2$。

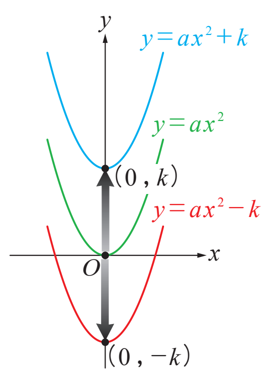
(2) 左移 h 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=a(x+h)^2$。

(3) 上移 k 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=ax^2+k$。

(4) 下移 k 單位：$y=ax^2 \Rightarrow y=ax^2-k$。

(5) 不論左右或上下平移，開口方向及大小都沒有改變，但是頂點位置可能會改變。





國中基礎能力檢定

1. 已知一次函數 $f(x)=3x-1$，則 $f(1)+f(2)+f(-3)=$ __-3__。

解　所求為 $f(1)+f(2)+f(-3)$

$=(3\times1-1)+(3\times2-1)+[3\times(-3)-1]$

$=2+5+(-10)$

$=-3$

2. 已知 $a<0$，$b>0$，則直線 $y=ax+b$ 圖形不通過下列哪一個象限？
(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限。

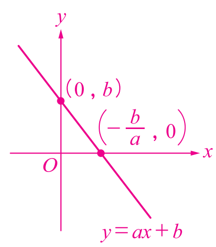
答　__(C)__。

解

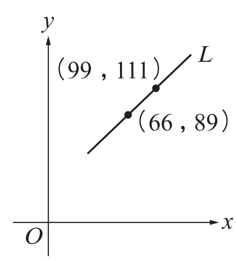
x	0	$-\frac{b}{a}$
y	b	0

其中 $b>0$，$-\dfrac{b}{a}>0$

如右圖：$y=ax+b$ 圖形
不通過第三象限
故選(C)



3. 如右圖，直線 L 為線型函數 $f(x)=ax+b$，則 $f(0)=$ __45__。



解　$\begin{cases} f(66)=66a+b=89 \\ f(99)=99a+b=111 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=45 \end{cases}$

$\therefore f(x)=\dfrac{2}{3}x+45$

故所求 $f(0)=45$

4. 若 $y=ax+b$ 的圖形是一條通過點$(-4,3)$的水平直線，則數對$(a,b)=$ ＿$(0,3)$＿。

解 ① 水平直線⇨ $a=0$

② 又通過$(-4,3)$⇨ $b=3$

故所求數對$(a,b)=(0,3)$

5. 直角坐標平面原點 $O(0,0)$到直線 L：$3x+4y-12=0$ 上的所有點的距離之中，最小距離為 ＿$\frac{12}{5}$＿。

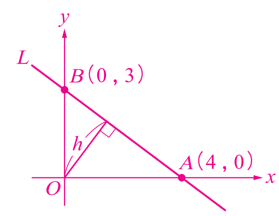
解 L：$3x+4y-12=0$

x	0	4
y	3	0

直線 L 與坐標軸交於 $A(4,0)$，$B(0,3)$

令 O 到 L 的最小距離為 h

如右圖



$$h=\frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{\overline{AB}}=\frac{4\times3}{5}$$

$$=\frac{12}{5}$$

6. 已知二次函數 $f(x)$的頂點為$(1,2)$，且通過點$(3,4)$，則此二次函數

$f(x)=$ ＿$\frac{1}{2}(x-1)^2+2$＿。

解 設 $f(x)=a(x-1)^2+2$

過$(3,4)$，代入得 $4=4a+2$ ⇨ $a=\frac{1}{2}$

所求 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

7. 已知 $f(x)=-2(x-3.3)^2+4$，則下列的函數值之中哪一個最大？

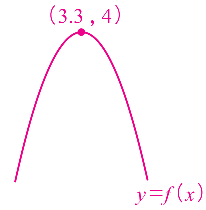
(A) $f(2)$　(B) $f(3)$　(C) $f(4)$　(D) $f(5)$。

答　(B)　。

解　$y=f(x)=-2(x-3.3)^2+4$ 的圖形開口向下，頂點為 $(3.3，4)$

若 x 值愈靠近 3.3，則 $f(x)$ 值愈大

故選(B)



8. 已知 $f(x)=2(x-3.3)^2-4$，則下列的函數值哪一個最大？

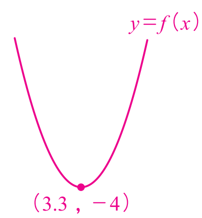
(A) $f(2)$　(B) $f(3)$　(C) $f(4)$　(D) $f(5)$。

答　(D)　。

解　$y=f(x)=2(x-3.3)^2-4$ 的圖形開口向上，頂點為 $(3.3，-4)$

若 x 值離 3.3 愈遠，則 $f(x)$ 值愈大

故選(D)



9. 二次函數 $y=x^2+9x-36$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點 A、B，則 $\overline{AB}$ 的長度為　15　。

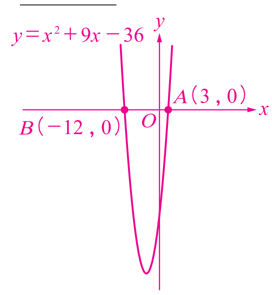
解　令 $y=0 \Rightarrow x^2+9x-36=0$

$\Rightarrow (x-3)(x+12)=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 $x=-12$

設 $A(3，0)$，$B(-12，0)$

則 $\overline{AB}$ 的長度為 $|3-(-12)|=15$



10. 已知 $k>0$，若二次函數 $f(x)=x^2+3$ 向右平移 k 單位可通過點 $(0，7)$，則 k 之值為__2__。

解 $y=f(x)=x^2+3 \xrightarrow{\text{向右平移 } k \text{ 單位}} y=f(x)=(x-k)^2+3$

過 $(0，7)$，代入得 $7=(0-k)^2+3$

⇨ $k^2=4$

⇨ $k=\pm 2$（取正 $\because k>0$）

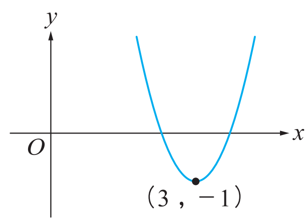
所求 $k=2$

11. 已知由地面算起每爬升 100 公尺，氣溫就下降 0.6 度。若現在地面溫度是 20 度，阿雄在高度為 3600 公尺的山上健行，則他所在位置的氣溫應該是__-1.6__度。

解 $20-0.6\times\dfrac{3600}{100}=-1.6$

故所求溫度為 -1.6 度

12. 如右圖是二次函數 $y=2x^2+bx+c$ 的圖形，則數對 $(b，c)$ ＝__$(-12，17)$__。



解 由題圖可知

$y=2(x-3)^2-1$

$=2(x^2-6x+9)-1$

$=2x^2-12x+17$

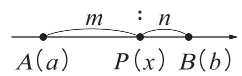
與 $y=2x^2+bx+c$ 同義

可得 $b=-12$，$c=17$

所求數對 $(b，c)=(-12，17)$

高中先修課程

銜接焦點 1　分點公式



數線上有相異兩點 $A(a)$，$B(b)$，若點 P 是 $\overline{AB}$ 上的分點，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，其中 m，n 皆為正實數，則點 P 的坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$。

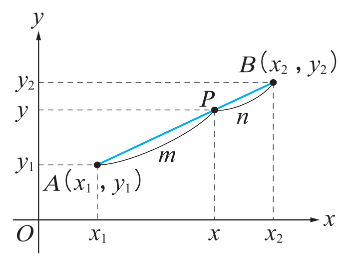
說明

(1) 假設 $a<b$，令 $P(x)$，由 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

$\Rightarrow (x-a):(b-x)=m:n \Rightarrow n(x-a)=m(b-x)$

$\Rightarrow (m+n)x=na+mb \Rightarrow x=\dfrac{na+mb}{m+n}$。

(2) 平面上有相異兩點 $A(x_1,y_1)$與 $B(x_2,y_2)$，若點 P 為 $\overline{AB}$ 上的分點，使得 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，分別討論 x 坐標及 y 坐標的分點公式，則可得到點 P 的坐標為$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$。



例題 1

(1) 數線上兩點 $A(-3)$，$B(11)$，若點 $P(x)$在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=5:2$，則 $x=$__7__。

(2) 坐標平面上 $A(1,-3)$，$B(11,12)$，若點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則點 P 的坐標為__$(5,3)$__。

解

(1) $x=\dfrac{(-3)\times2+11\times5}{5+2}=7$

(2) 設 $P(x,y)$，則 $x=\dfrac{1\times3+11\times2}{2+3}=5$，$y=\dfrac{(-3)\times3+12\times2}{2+3}=3$

$\therefore$點 $P(5,3)$

練習 1

(1) 數線上兩點 $A(3)$，$B(-9)$，若點 $Q(x)$在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AQ}:\overline{QB}=2:1$，則 $x=$__-5__。

(2) 坐標平面上 $A(-3,2)$，$B(4,9)$，若點 Q 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AQ}:\overline{QB}=4:3$，則點 Q 的坐標為__$(1,6)$__。

解

(1) $x=\dfrac{3\times1+(-9)\times2}{2+1}=-5$

(2) 設 $Q(x,y)$

則 $x=\dfrac{(-3)\times3+4\times4}{4+3}=1$，$y=\dfrac{2\times3+9\times4}{4+3}=6$

$\therefore$點 $Q(1,6)$

銜接焦點 2 二次函數與配方法

▨ 將二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 整理成 $f(x)=a(x-h)^2+k$ 的型式，即是對二次函數配方，如此可知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的頂點為 (h,k)，對稱軸為 $x=h$。

說明

(1) 使用配方法的步驟如下：

① x^2 項及 x 項提出係數 a，使得 x^2 項的係數為 1。

② x^2 項及 x 項配成完全平方。

③ 調整常數項。

(2)
$$\begin{aligned} f(x)&=ax^2+bx+c \\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\text{。}\end{aligned}$$

例題 2

(1) 二次函數 $f(x)=x^2+4x+3$ 的頂點為 $(-2,-1)$。

(2) 二次函數 $f(x)=-x^2+2x+5$ 的頂點為 $(1,6)$。

(3) 二次函數 $f(x)=3x^2-18x-27$ 的頂點為 $(3,-54)$。

解 (1) $f(x)=(x^2+4x)+3=(x^2+2\cdot2\cdot x+2^2)+3-2^2=(x+2)^2-1$

$\therefore$ 頂點為 $(-2,-1)$

(2) $f(x)=-(x^2-2x)+5=-(x^2-2\cdot1\cdot x+1^2)+5+1^2=-(x-1)^2+6$

$\therefore$ 頂點為 $(1,6)$

(3) $f(x)=3(x^2-6x)-27=3(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)-27-3\cdot3^2=3(x-3)^2-54$

$\therefore$ 頂點為 $(3,-54)$

練習 2

(1) 二次函數 $f(x)=x^2-4x+9$ 的頂點為 $(2,5)$。

(2) 二次函數 $f(x)=-x^2-2x+5$ 的頂點為 $(-1,6)$。

(3) 二次函數 $f(x)=-2x^2-2x-2$ 的頂點為 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$。

解 (1) $f(x)=(x^2-4x)+9=(x^2-2\cdot2\cdot x+2^2)+9-2^2=(x-2)^2+5$

$\therefore$ 頂點為 $(2,5)$

(2) $f(x)=-(x^2+2x)+5=-(x^2+2\cdot1\cdot x+1^2)+5+1^2=-(x+1)^2+6$

$\therefore$ 頂點為 $(-1,6)$

(3) $f(x)=-2(x^2+x)-2=-2\left[x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

$\therefore$ 頂點為 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

先修銜接能力檢定

1. 數線上兩點 $A(-5)$，$B(15)$，若點 $P(x)$在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則 $x=$ __3__ 。

解 $x=\dfrac{(-5)\times3+15\times2}{2+3}=3$

2. 數線上 $A(a)$，$B(18)$，若點 $M(-1)$是 $\overline{AB}$ 的中點，則 a 之值為 __-20__ 。

解 依題意，$\dfrac{a+18}{2}=-1$ ⇨ $a=-20$

3. 坐標平面上 $A(1,-2)$，$B(13,16)$，若點 Q 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AQ}:\overline{QB}=1:5$，則點 Q 的坐標為 __$(3,1)$__ 。

解 設 $Q(x,y)$

則 $x=\dfrac{1\times5+13\times1}{1+5}=3$

$y=\dfrac{(-2)\times5+16\times1}{1+5}=1$

$\therefore$點 $Q(3,1)$

4. 坐標平面上 $A(a,-5)$，$B(3,b)$，若點 $Q(-1,2)$是 $\overline{AB}$ 的中點，則數對(a,b) $=$ __$(-5,9)$__ 。

解 依題意，

$$\begin{cases}\dfrac{a+3}{2}=-1\\[2mm]\dfrac{-5+b}{2}=2\end{cases} ⇨ \begin{cases}a=-5\\ b=9\end{cases}$$

$\therefore$數對$(a,b)=(-5,9)$

5. 試求下列各小題中的實數數對(p,q)：

(1) $x^2+4x+3=(x-p)^2+q$，則數對$(p,q)=$ $\underline{(-2,-1)}$。

(2) $-x^2+x-2=-(x-p)^2+q$，則數對$(p,q)=$ $\underline{\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)}$。

(3) $2x^2+6x-3=2(x-p)^2+q$，則數對$(p,q)=$ $\underline{\left(-\frac{3}{2},-\frac{15}{2}\right)}$。

(4) $-3x^2+x+2=-3(x-p)^2+q$，則數對$(p,q)=$ $\underline{\left(\frac{1}{6},\frac{25}{12}\right)}$。

解 (1) $x^2+4x+3=(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2)+3-2^2$

$=(x+2)^2-1$

$\therefore$數對$(p,q)=(-2,-1)$

(2) $-x^2+x-2=-(x^2-x)-2$

$=-\left[x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

$\therefore$數對$(p,q)=\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$

(3) $2x^2+6x-3=2(x^2+3x)-3$

$=2\left[x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-3-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{15}{2}$

$\therefore$數對$(p,q)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{15}{2}\right)$

(4) $-3x^2+x+2=-3\left(x^2-\frac{1}{3}x\right)+2$

$=-3\left[x^2-2\cdot\frac{1}{6}\cdot x+\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]+2+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{25}{12}$

$\therefore$數對$(p,q)=\left(\frac{1}{6},\frac{25}{12}\right)$

6. 已知 $f(x)=2x^2-8x+m$ 的最小值為 160，則 $m=$ <u>168</u> 。

解 $f(x)=2x^2-8x+m$

$=2(x^2-4x)+m$

$=2(x-2)^2+m-8$

當 $x=2$ 時，$f(x)$ 有最小值 $m-8$

即 $m-8=160$ ⇨ $m=168$

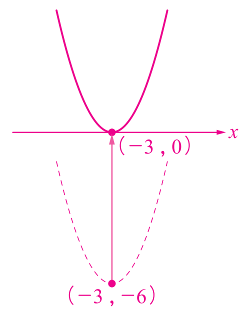
7. 將二次函數 $y=x^2+6x+3$ 的圖形上移 k 單位，新圖形與 x 軸恰交於一點，則 k 之值為 <u>6</u> 。

解 $y=x^2+6x+3$ ⇨ $y=(x+3)^2-6$

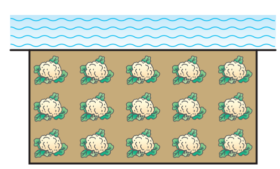
頂點為 $(-3，-6)$

上移 6 單位，新圖形和 x 軸恰交於一點

故所求 $k=6$



8. 小明想用 60 公尺的鐵絲網在河邊圍成一長方形的菜圃，河邊可當一邊不用鐵絲網，僅圍其餘三邊。則小明可圍成的長方形菜圃的最大面積為 <u>450</u> 平方公尺。



解 如右圖，設長方形的兩邊分別為 x，y 公尺

⇨ $2x+y=60$

面積為 xy

$=x(60-2x)$

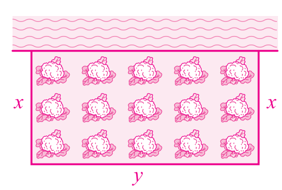
$=-2x^2+60x$

$=-2(x^2-30x)$

$=-2(x-15)^2+450$

當 $x=15$ 時，有最大值 450

∴最大面積為 450 平方公尺



綜合能力檢定

1. 潛水夫在水面下的深度（d 公尺）與身體所承受壓力（p 個大氣壓）有下列關係 $p=k\times d+1$（其中 k 為常數），若在水面下 50 公尺，身體所承受的壓力為 5.97 個大氣壓，則在水面下 100 公尺，身體所承受的壓力為__10.94__個大氣壓。

解 依題意 $5.97=k\times 50+1 \Rightarrow k=\dfrac{4.97}{50}$

可得 $p=\dfrac{4.97}{50}\times d+1$

當 $d=100$ 代入 $\Rightarrow p=\dfrac{4.97}{50}\times 100+1=10.94$（個大氣壓）

2. 二次函數 $f(x)=(x-2)^2+x^2+(x+5)^2$ 的最小值為__26__。

解 $f(x)=(x-2)^2+x^2+(x+5)^2$

$=3x^2+6x+29$

$=3(x^2+2x)+29$

$=3(x+1)^2+26$

當 $x=-1$ 時，$f(x)$ 有最小值 26

3. 坐標平面上 $A(1，2)$，$B(9，-6)$，若點 P 在 $\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overline{AP}：\overline{PB}=5：3$，則點 P 的坐標為__$(6，-3)$__。

解 設 $P(x，y)$

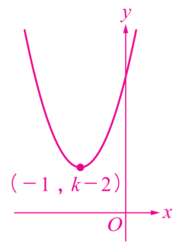
則 $x=\dfrac{1\times 3+9\times 5}{5+3}=6$，$y=\dfrac{2\times 3+(-6)\times 5}{5+3}=-3$

$\therefore$ 點 $P(6，-3)$

4. 若二次函數 $f(x)=2x^2+4x+k$ 的圖形和 x 軸沒有交點，則實數 k 可能為下列何者？（多選）
(A) -6　(B) -3　(C) 0　(D) 3　(E) 6。

答 (D)(E)。

解 $f(x)=2x^2+4x+k$
$=2(x^2+2x)+k$
$=2(x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2)+k-2\cdot 1^2$
$=2(x+1)^2+k-2$
∴頂點為 $(-1,k-2)$
如右圖，二次函數圖形和 x 軸沒有交點
⇨頂點 $(-1,k-2)$ 在 x 軸上方
⇨ $k-2>0$
⇨ $k>2$
故選(D)(E)



5. 設 p，q，r 皆為介於 2 與 10 之間的實數，且滿足

$$\sqrt{6}\,|p-2|=\sqrt{7}\,|p-10|，\sqrt{7}\,|q-2|=\sqrt{8}\,|q-10|，\sqrt{5}\,|r-2|=\sqrt{6}\,|r-10|，$$

請比較 p，q，r 的大小，下列選項何者正確？
(A) $p>q>r$　(B) $q>r>p$　(C) $q>p>r$　(D) $r>p>q$。

答 (D)。

解 依題意，$|p-2|:|p-10|=\sqrt{7}:\sqrt{6}=1:\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

$|q-2|:|q-10|=\sqrt{8}:\sqrt{7}=1:\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

$|r-2|:|r-10|=\sqrt{6}:\sqrt{5}=1:\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$\because \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}<\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}<\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$

∴ r 最靠近 10，其次為 p，再其次為 q
得 $r>p>q$
故選(D)

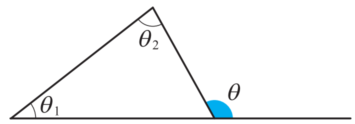
單元 5 三角比

國中複習

1. ⑴ 三角形的內角和為 180°。

⑵ 正三角形的每一內角為 60°。

⑶ 外角定理：如右圖，$\theta=\theta_1+\theta_2$。



2. ⑴ 正 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180°$。

⑵ 正 n 邊形的任一內角為 $\dfrac{(n-2)\times180°}{n}$。

3. **三角形的邊角關係**

在同一個三角形中：

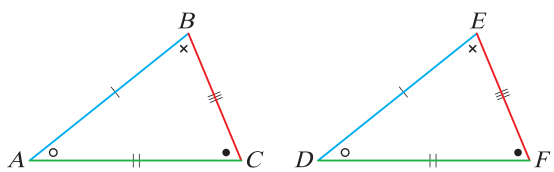
⑴ 任意兩邊和大於第三邊，任意兩邊差小於第三邊。

⑵ 大角對大邊，小角對小邊。

4. **三角形的全等**

若$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，

則兩個三角形的對應角相等且對應邊相等。

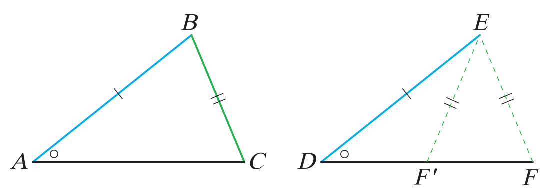


5. ***SSA***

已知兩三角形$\triangle ABC$與$\triangle DEF$，

$\angle A=\angle D$ 且 $\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，

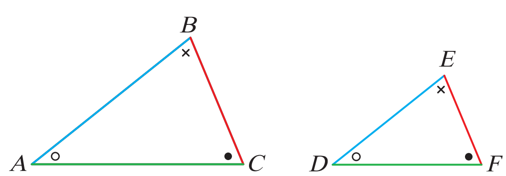
則兩個三角形可能全等也可能不全等。



6. **三角形的相似**

若$\triangle ABC\sim\triangle DEF$，

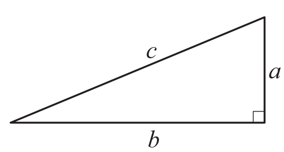
則兩個三角形的對應角相等且對應邊成比例。



7. **直角三角形的畢氏定理**

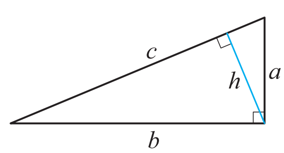
若直角三角形的斜邊長為 c，兩股長分別為 a，b，

則 $c^2=a^2+b^2$。



8. **直角三角形斜邊上的高**

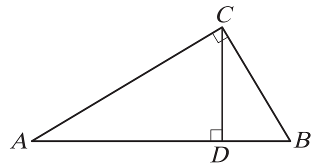
如右圖：斜邊上的高 $h=\dfrac{ab}{c}$。



9. **直角三角形母子相似定理**

在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，

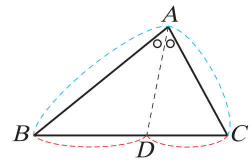
則$\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}$。



10. **內分比性質**

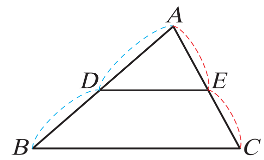
在$\triangle ABC$中，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$，

則$\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$。



11. **平行線截三角形兩邊成比例線段性質**

如右圖，若$\overline{DE}/\!/\overline{BC}$，則$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$。



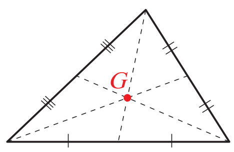
12. **三角形的心**

(1) 重心，如圖㈠：三中線的交點。

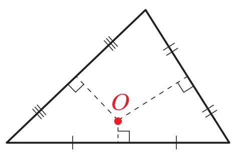
(2) 外心，如圖㈡：三邊中垂線的交點。

(3) 垂心，如圖㈢：三邊上高的交點。

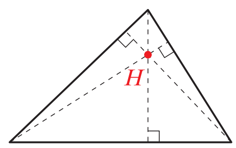
(4) 內心，如圖㈣：三內角平分線的交點。



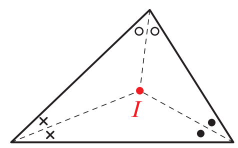
圖㈠



圖㈡



圖㈢



圖㈣

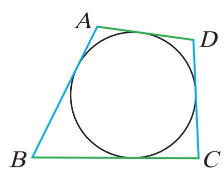
13. **圓外切四邊形**

如圖㈤，若$ABCD$為圓外切四邊形，

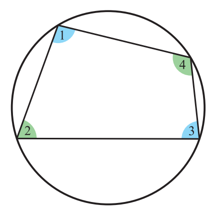
則$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$。

14. **圓內接四邊形對角互補**

如圖㈥，$\angle 1+\angle 3=180^\circ$，$\angle 2+\angle 4=180^\circ$。



圖㈤

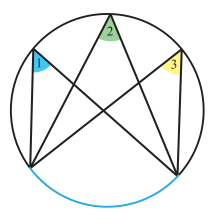


圖㈥

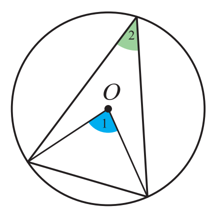
15. (1) 對同弧圓周角相等，如圖㈦，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$。

(2) 對同弧圓心角是圓周角的兩倍，如圖㈧，

$\angle 1=2\angle 2$。



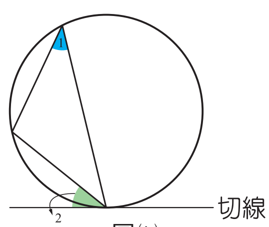
圖㈦



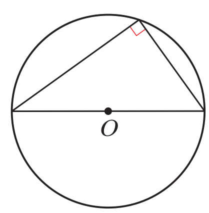
圖㈧

16. 如圖㈨，弦切角等於截弧所對圓周角⇨$\angle 1=\angle 2$。

17. 如圖㈩，半圓內圓周角為90°。



圖㈨

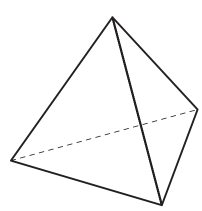


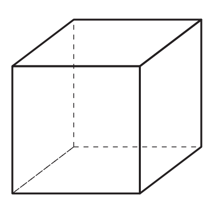
圖㈩

18. **特殊立體圖形**

(1) 正四面體，如圖⑪。

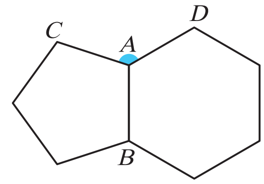
(2) 正六面體，如圖⑫。


圖⑪


圖⑫

國中基礎能力檢定

1. 如右圖，正五邊形與正六邊形有共同邊 $\overline{AB}$，則$\angle CAD$ 的度數為__132__度。

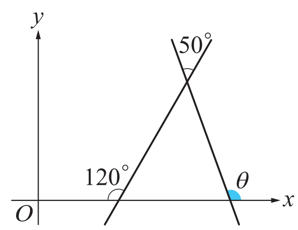


解 $\angle BAC=\dfrac{(5-2)\times180^\circ}{5}=108^\circ$

$\angle BAD=\dfrac{(6-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$

故$\angle CAD=360^\circ-108^\circ-120^\circ$
$=132^\circ$

2. 如右圖，角度 $\theta=$__110__度。



解 依外角定理

$\theta=50^\circ+(180^\circ-120^\circ)$
$=110^\circ$

3. 已知 x 是正整數，若 16，9，$x-5$ 表三角形的三邊長，則滿足此條件的 x 值有__17__個。

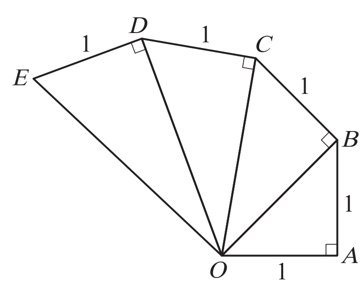
解 ∵三角形任意兩邊和大於第三邊，且任意兩邊差小於第三邊

可知 $16-9<x-5<16+9$

⇨ $12<x<30$

滿足條件的 x 可以是 13，14，15，……，29，共 17 個

4. 如右圖，$\overline{OE}=$__$\sqrt{5}$__。



解 由畢氏定理，依序求得

$\overline{OB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

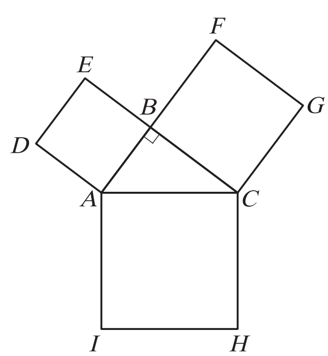
⇨ $\overline{OC}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

⇨ $\overline{OD}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}$

⇨ $\overline{OE}=\sqrt{1^2+(\sqrt{4})^2}=\sqrt{5}$

故 $\overline{OE}=\sqrt{5}$

5. 如右圖，以直角三角形的三邊為邊長向外作正方形，若正方形 $ABED$、$BFGC$ 的面積分別為 36、64，則正方形 $ACHI$ 的面積為__100__。



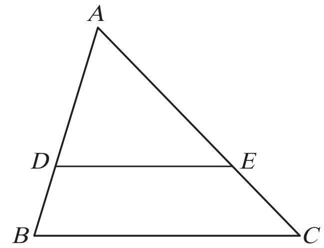
解 正方形 $ACHI$ 面積$=\overline{AC}^2$

$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$=36+64$

$=100$

6. 如右圖，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=11$，$\overline{AC}=12$，$\overline{AD}=6$，$\overline{AE}=8$，則：



(1) $\overline{DE}=$ $\underline{\dfrac{22}{3}}$。

(2) $\triangle ADE$ 面積與$\triangle ABC$ 面積的比值為 $\underline{\dfrac{4}{9}}$。

解 (1) $\overline{AD}:\overline{AB}=6:9=2:3$

$\overline{AE}:\overline{AC}=8:12=2:3$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC}$

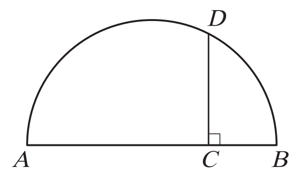
$\Rightarrow \triangle ADE\sim\triangle ABC$

可得 $\overline{DE}:\overline{BC}=2:3$

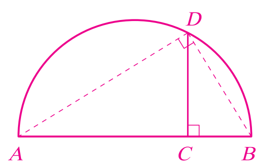
$\Rightarrow \overline{DE}:11=2:3 \Rightarrow \overline{DE}=\dfrac{22}{3}$

(2) $\triangle ADE$ 面積與$\triangle ABC$ 面積的比值為 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

7. 如右圖，$\overline{AB}$ 為直徑，點 C 在 $\overline{AB}$ 上，點 D 在圓弧上，且 $\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=3$，若 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$，則 $\overline{CD}=$ $\underline{2\sqrt{6}}$。



解 如右圖，作 $\overline{AD}$，$\overline{BD}$ 連線，



依直角三角形母子相似定理可得

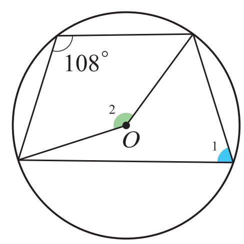
$\overline{CD}^2=\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=8\times3$

$=24$

故 $\overline{CD}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

8. 如右圖，O 為圓心，則$\angle 2$ 為 $\underline{144}$ 度。



解 $\angle 1=180^\circ-108^\circ=72^\circ$

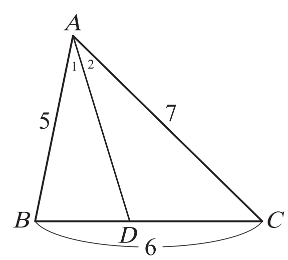
故$\angle 2=2\angle 1$

$=2\times72^\circ$

$=144^\circ$

9. 如右圖，$\triangle ABC$ 三邊長依序為 5，6，7，且知$\angle 1=\angle 2$，

則 $\overline{BD}=$ $\underline{\dfrac{5}{2}}$。



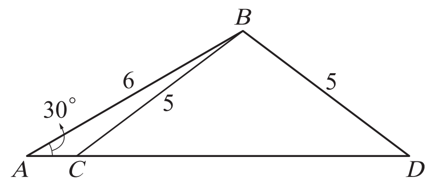
解 依內分比性質

$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BA}:\overline{AC}$

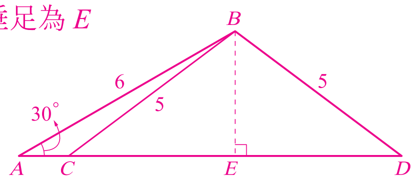
$=5:7$

故 $\overline{BD}=\dfrac{5}{5+7}\times\overline{BC}=\dfrac{5}{12}\times6=\dfrac{5}{2}$

10. 如右圖，$\overline{CD}$＝＿8＿。



解 如右圖，由 B 向 $\overline{AD}$ 作垂直線，垂足為 E



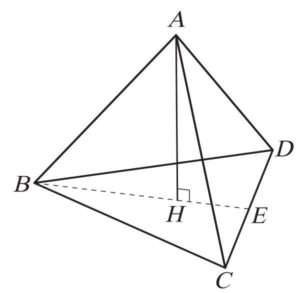
則 $\overline{BE}=\overline{AB}\times\dfrac{1}{2}=6\times\dfrac{1}{2}=3$

故 $\overline{CD}=2\times\sqrt{5^2-3^2}$

$=2\times4$

$=8$

11. 如右圖，正四面體 $ABCD$ 的邊長為 $4\sqrt{3}$，H 為△BCD 的重心，已知 $\overline{AH}\perp\overline{BH}$，則：



(1) $\overline{AH}$＝＿$4\sqrt{2}$＿。

(2) 正四面體 $ABCD$ 的體積為＿$16\sqrt{6}$＿。

解 (1) ∵H 為△BCD 重心

∴延伸 $\overleftrightarrow{BH}$ 與 $\overline{CD}$ 交點即為 $\overline{CD}$ 中點，令此交點為 E

則 $\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BE}=\dfrac{2}{3}\times\left(4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4$

故 $\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}$

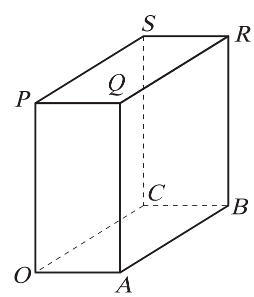
$=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-4^2}$

$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

(2) 正四面體體積為 $\dfrac{1}{3}\times$△BCD 面積$\times\overline{AH}=\dfrac{1}{3}\times\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\right]\times4\sqrt{2}$

$=16\sqrt{6}$

12. 如右圖，$OABCPQRS$ 為一長方體，$\overline{OA}=2$，$\overline{OC}=3$，$\overline{OP}=4$，



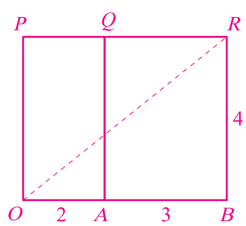
(1) 一隻蜜蜂由點 O 飛到點 R，其最短路徑長為＿$\sqrt{29}$＿。

(2) 一隻蜜蜂由點 O 爬到點 R，其最短路徑長為＿$\sqrt{41}$＿。

解 (1) 空間中，$\overline{OR}=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$ 為最短路徑長

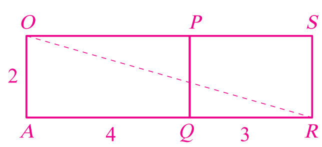
(2) 將長方體展開成平面，考慮下列兩個情形

①



⇨ $\overline{OR}=\sqrt{(2+3)^2+4^2}=\sqrt{41}$

②



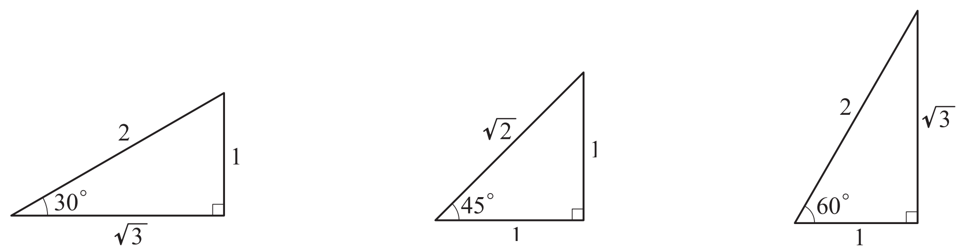
⇨ $\overline{OR}=\sqrt{(4+3)^2+2^2}=\sqrt{53}$

綜合①、②，最短路徑長為 $\sqrt{41}$

高中先修課程

銜接焦點 1　直角三角形

1. 特別角

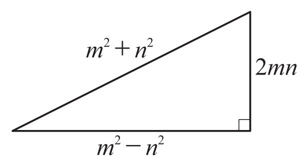


2. 畢氏三元組

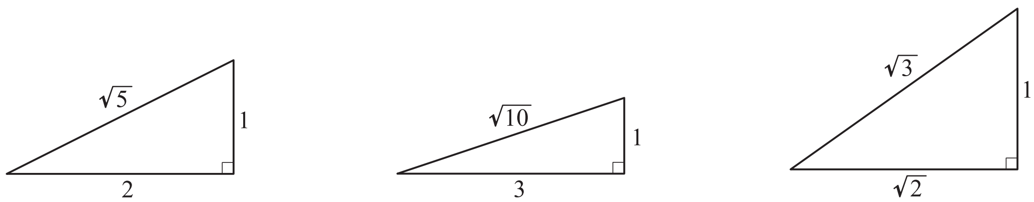
已知 m，n 為兩正整數且 $m>n$，則 m^2-n^2，m^2+n^2，$2mn$ 可為一個直角三角形的三邊長。

說明：

(1) 因為 $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$，
所以可形成直角三角形，如右圖所示。

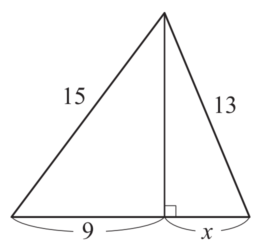


(2) 其它常見的直角三角形



例題 1

(1) 如右圖，$x=$ <u>5</u> 。



解 底邊上的高為 $\sqrt{15^2-9^2}=12$

故 $x=\sqrt{13^2-12^2}$

$=5$

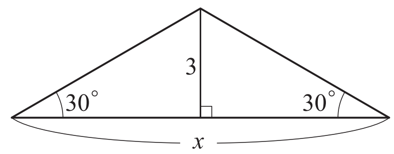
(2) 依畢氏三元組，給定 $m=6$，$n=3$，可得直角三角形三邊長為 <u>27，36，45</u> 。

解 $\begin{cases} m^2-n^2=6^2-3^2=27 \\ m^2+n^2=6^2+3^2=45 \\ 2mn=2\times6\times3=36 \end{cases}$

$\therefore$ 三邊長為 27，36，45

練習 1

(1) 如右圖，$x=$ <u>$6\sqrt{3}$</u>。



解 $x=(3\times\sqrt{3})\times 2$
$=6\sqrt{3}$

(2) 依畢氏三元組，給定 $m=5$，$n=1$，可得直角三角形三邊長為 <u>10，24，26</u>。

解 $\begin{cases} m^2-n^2=5^2-1^2=24 \\ m^2+n^2=5^2+1^2=26 \\ 2mn=2\times5\times1=10 \end{cases}$

$\therefore$三邊長為 10，24，26

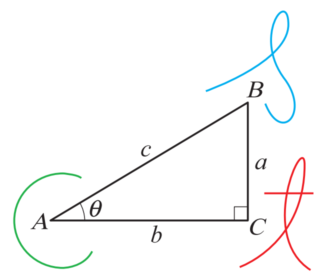
銜接焦點 2　三角比

▩ 銳角的正弦、餘弦、正切

(1) $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$ $\left(\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\right)$

(2) $\cos\theta=\dfrac{b}{c}$ $\left(\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\right)$

(3) $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ $\left(\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\right)$



說明：

(1) 三角形 ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊分別為 a、b、c。
如右圖，對 θ 角而言，c 為斜邊，a 為對邊，b 為鄰邊。

(2) sin 唸「*sine*」(正弦)；cos 唸「*co－sine*」(餘弦)；tan 唸「*tangent*」(正切)。

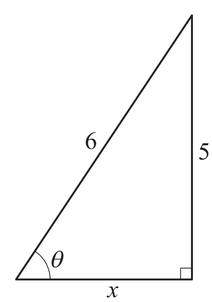
(3) 確定了直角三角形的三邊長，也就可以得到「正弦」，「餘弦」，「正切」的值。

例題 2

(1) 如右圖，

① $x=$ <u>$\sqrt{11}$</u>。

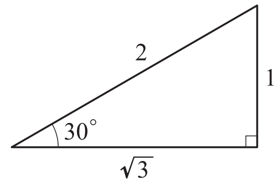
② $\cos\theta=$ <u>$\dfrac{\sqrt{11}}{6}$</u>。



解 ① $x=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$

② $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

(2) 如右圖，



① $\sin 30^\circ=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$。　② $\cos 30^\circ=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$。

③ $\tan 30^\circ=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$。

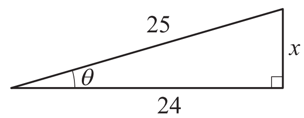
解 ① $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$

② $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

練習 2

(1) 如右圖，

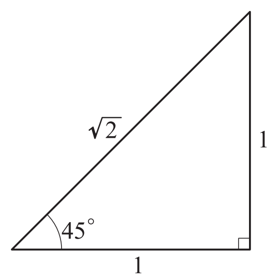


① $x=$ $\underline{7}$。　② $\sin\theta=$ $\underline{\dfrac{7}{25}}$。

解 ① $x=\sqrt{25^2-24^2}=7$

② $\sin\theta=\dfrac{7}{25}$

(2) 如右圖，



① $\sin 45^\circ=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。　② $\cos 45^\circ=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$。

③ $\tan 45^\circ=$ $\underline{1}$。

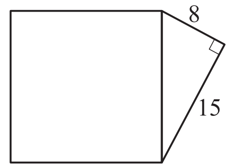
解 ① $\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

② $\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\tan 45^\circ=\dfrac{1}{1}=1$

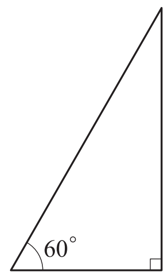
先修銜接能力檢定

1. 如右圖，正方形的面積為__289__。



解 正方形的面積為 $15^2+8^2=289$

2. 如右圖，



(1) $\sin 60^\circ=$__$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$__。　(2) $\cos 60^\circ=$__$\dfrac{1}{2}$__。

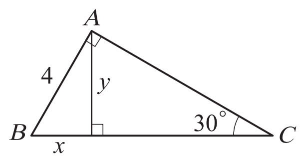
(3) $\tan 60^\circ=$__$\sqrt{3}$__。

解 (1) $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(3) $\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

3. 如右圖，



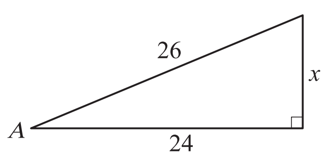
(1) $x=$__2__。　(2) $y=$__$2\sqrt{3}$__。

解 $\angle ABC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

(1) $x=4\times\dfrac{1}{2}=2$

(2) $y=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

4. 如右圖，



(1) $x=$__10__。　(2) $\sin A=$__$\dfrac{5}{13}$__。

(3) $\tan A=$__$\dfrac{5}{12}$__。

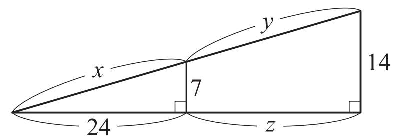
解 (1) $x=\sqrt{26^2-24^2}=10$

(2) $\sin A=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$

(3) $\tan A=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$

5. 如右圖，

(1) $x=$ __25__ 。　(2) $y=$ __25__ 。　(3) $z=$ __24__ 。



解 (1) $x=\sqrt{24^2+7^2}=25$

(2) $x:(x+y)=7:14$

⇨ $25:(25+y)=7:14$

⇨ $y=25$

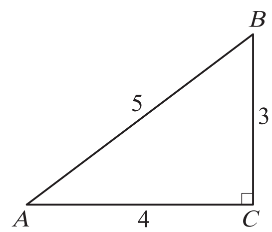
(3) $24:(24+z)=7:14$

⇨ $z=24$

6. 如右圖，

(1) $\sin A=$ __$\frac{3}{5}$__ 。　(2) $\cos A=$ __$\frac{4}{5}$__ 。　(3) $\tan A=$ __$\frac{3}{4}$__ 。

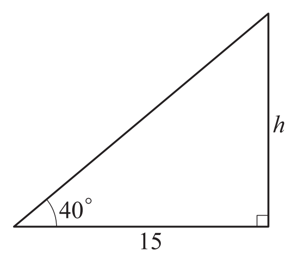
(4) $\sin B=$ __$\frac{4}{5}$__ 。　(5) $\cos B=$ __$\frac{3}{5}$__ 。　(6) $\tan B=$ __$\frac{4}{3}$__ 。



解 (1) $\frac{3}{5}$；(2) $\frac{4}{5}$；(3) $\frac{3}{4}$；

(4) $\frac{4}{5}$；(5) $\frac{3}{5}$；(6) $\frac{4}{3}$

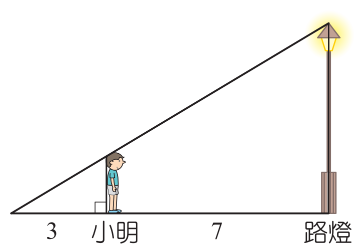
7. 如右圖，已知 $\tan 40^\circ \approx 0.8391$，則 $h\approx$ __12.59__ 。（四捨五入取到小數點後第二位）



解 $\tan 40^\circ=\frac{h}{15}$ ⇨ $0.8391\approx\frac{h}{15}$

⇨ $h\approx 15\times 0.8391\approx 12.5865\approx 12.59$

8. 如右圖，小明的身高 180 公分，前方有一座垂直路面的路燈，當他站在離路燈底座 7 公尺處，發現自己影長為 3 公尺，試問路燈的高度是 __6__ 公尺。



解 設路燈 h 公尺

$3:(3+7)=1.8:h$

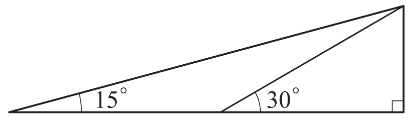
⇨ $3h=18$

⇨ $h=6$

∴路燈高度為 6 公尺

綜合能力檢定

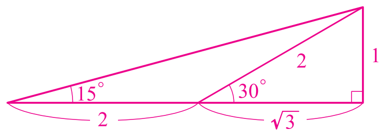
1. 如右圖，試求出 $\tan 15^\circ =$ __$2-\sqrt{3}$__。



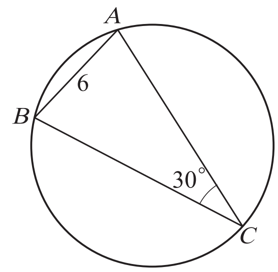
解 如右圖

$\tan 15^\circ = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= 2-\sqrt{3}$



2. 如右圖，圓內接三角形 ABC，$\overline{AB}=6$，$\angle ACB=30^\circ$，則此外接圓的半徑為__6__。



解 設圓半徑為 R

如右圖，作直徑 $\overline{AD}$

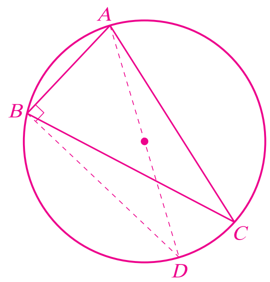
$\angle ADB=\angle ACB=30^\circ$

在△ABD 中，$\angle ABD=90^\circ$（半圓內圓周角 90°）

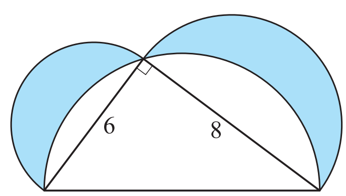
$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

⇨ $\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{2R}$ ⇨ $R=6$

∴外接圓半徑為 6



3. 如右圖，分別以直角三角形三邊長為直徑作出三個半圓，則陰影部分的面積為__24__。

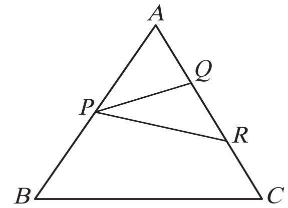


解 斜邊為 $\sqrt{6^2+8^2}=10$

陰影部分面積為 $\dfrac{1}{2}\times 3^2\pi+\dfrac{1}{2}\times 4^2\pi-\left(\dfrac{1}{2}\times 5^2\pi-\dfrac{6\times 8}{2}\right)$

$=24$ （**註**：陰影部分面積＝直角三角形面積）

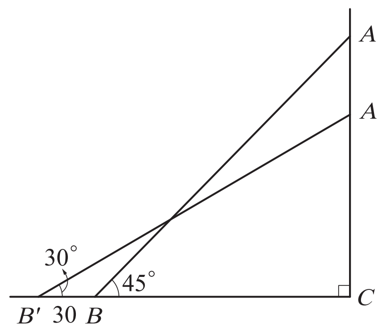
4. 如右圖，P 為 $\overline{AB}$ 中點，Q，R 為 $\overline{AC}$ 的三等分點，則 $\dfrac{\triangle PQR\text{ 的面積}}{\triangle ABC\text{ 的面積}}=$ $\underline{\ \dfrac{1}{6}\ }$ 。



解 $\overline{AP}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{QR}=\dfrac{1}{3}\overline{AC}$

故 $\dfrac{\triangle PQR\text{ 面積}}{\triangle ABC\text{ 面積}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

5. 如右圖，一根木棍 $\overline{AB}$ 原本倚靠牆上，在地面上滑動了 30 公分成為 $\overline{A'B'}$，則此木棍的長度為 $\underline{\ 60\sqrt{3}+60\sqrt{2}\ }$ 公分。



解 設木棍 $\overline{AB}=\overline{A'B'}=x$ 公分

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x \\ \overline{B'C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \end{cases}$

$\therefore \overline{B'C}-\overline{BC}=30$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x=30$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}x=30$

$\Rightarrow x=\dfrac{60}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=60(\sqrt{3}+\sqrt{2})=60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$

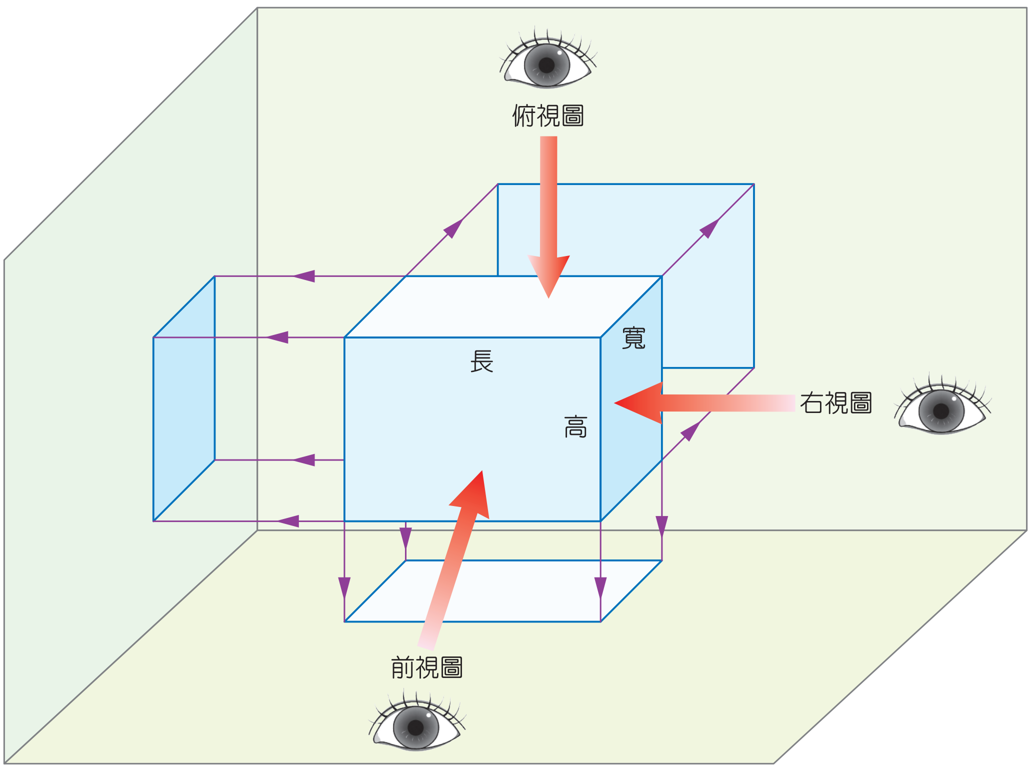
$\therefore$ 木棍長度為 $60\sqrt{3}+60\sqrt{2}$ 公分

單元 6

立體圖與三視圖

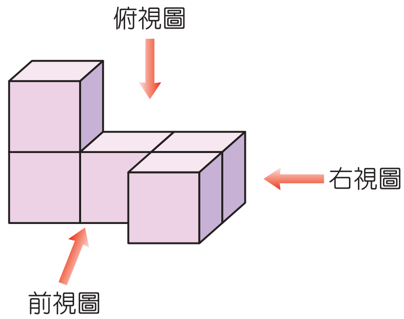
生活周遭有許多物品，建築物，藝術品，當我們從不同的角度觀看時，所看到的形狀，就成為「視圖」。一般立體圖形通常會由六個不同方向(前、後、左、右、上、下)去觀察此立體圖形的視圖，其中右視圖與左視圖、前視圖與後視圖，上視圖與下視圖兩形狀相同，僅方向相反，因此，一般情況下我們僅挑選右視圖、前視圖、上視圖(俯視圖)三個視圖即可清楚地表達一個立體圖形，稱為「三視圖」。

影片解說：https://www.youtube.com/watch?v=CwQg6DS8fKg

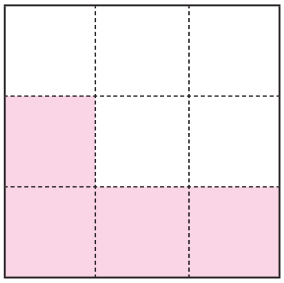


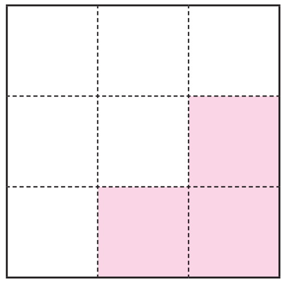
例題 1

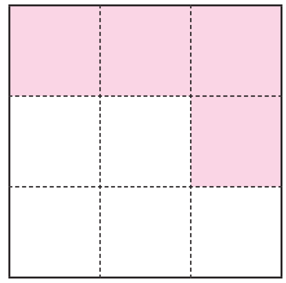
試在方格中繪出下方立體圖形的三視圖。



解

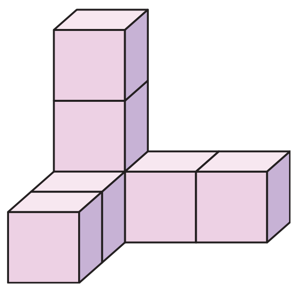

前視圖


右視圖

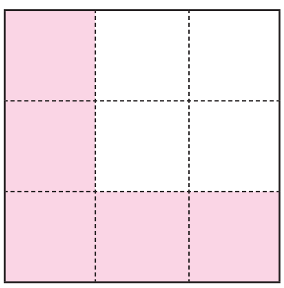

俯視圖

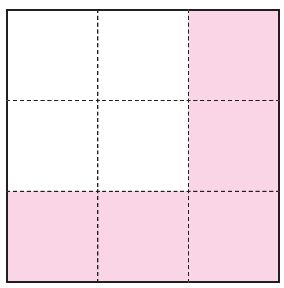
練習 1

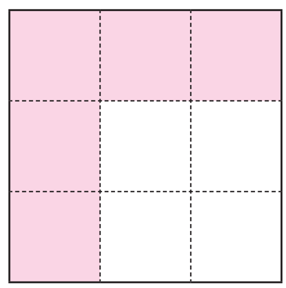
試在方格中繪出下方立體圖形的三視圖。



解

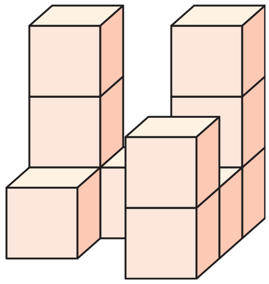

前視圖

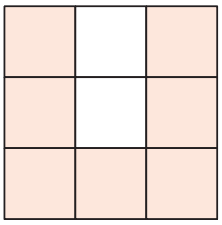

右視圖

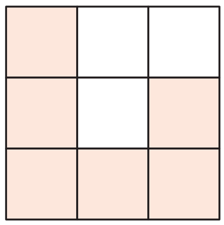

俯視圖

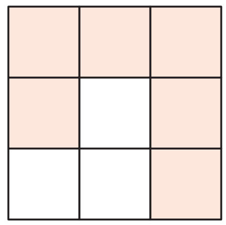
例題 2

下列哪一個選項是此物體的俯視圖？



(A)


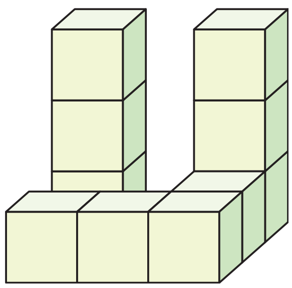
(B)


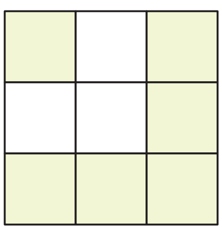
(C)


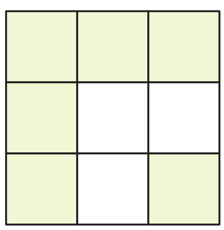
解 (C) 。

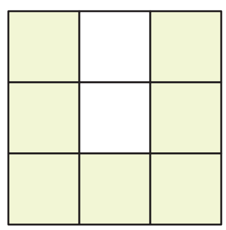
練習 2

下列哪一個選項是此物體的俯視圖？



(A)


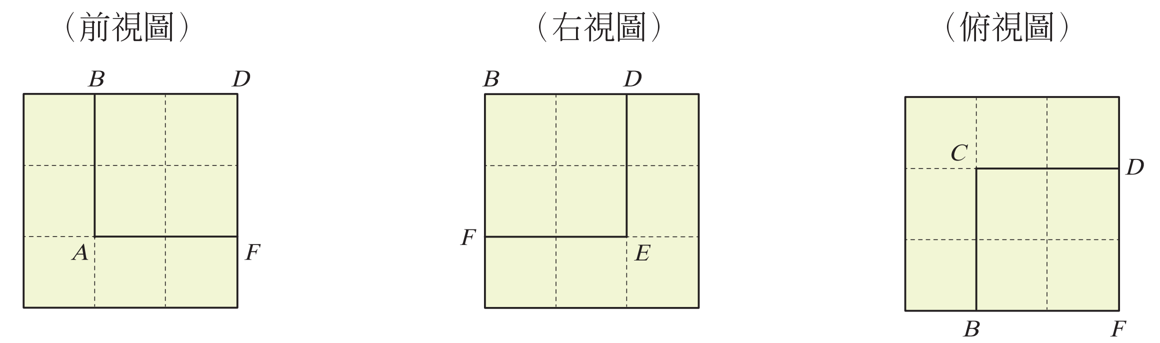
(B)


(C)


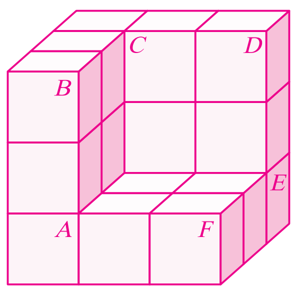
解 (A) 。

例題 3

由下方三視圖繪製出原立體圖形。

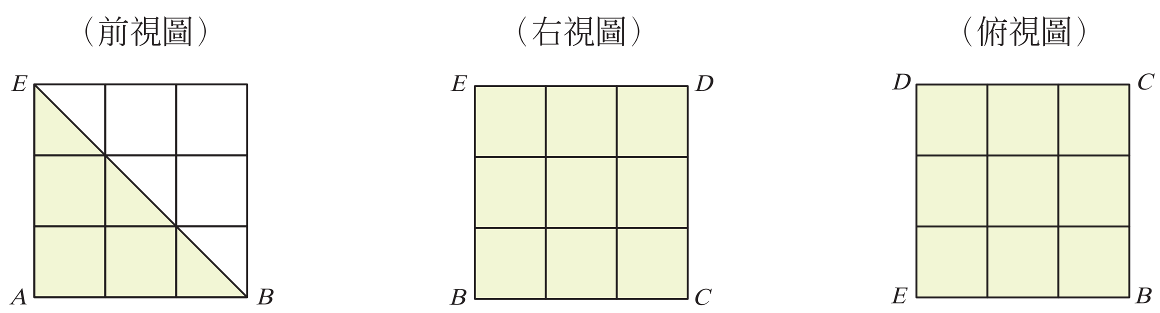


解 由上方實線是視線所能看見的邊長、點、角度，繪製在空間坐標中，或繪製在紙箱上，我們可以猜測出原立體圖形，應該如下圖所示

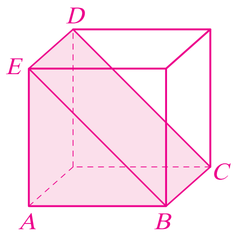


練習 3

由下方三視圖繪製出原立體圖形。



解



Notes